# Testul 32

## Subiectul I

**1.** Avem $\dfrac{\log_5 4}{\log_5 2} = \log_5 4 = 2$. **(5 p.)**

**2.** Ecuaţia este $x = -\dfrac{-5}{2\cdot 2}$, adică $x = \dfrac{5}{4}$. **(5 p.)**

**3.** Avem $(3^x - 1)^2 = 0$, deci $3^x = 1$, de unde $x = 0$. **(5 p.)**

**4.** $n + 10\%n \geq n + 1 \Leftrightarrow \dfrac{11n}{10} \geq n + 1 \Leftrightarrow n \geq 10$. Verifică zece numere din cele 20, deci probabilitatea este $\dfrac{1}{2}$. **(5 p.)**

**5.** Din $4 - 3y + 5 = 0$ rezultă $y = 3$. **(5 p.)**

**6.** Cum $13^2 = 12^2 + 5^2$, triunghiul e dreptunghic în *C*. Cel mai mic unghi este *B*, deoarece latura *CA* este cea mai mică. Atunci $\cos B = \dfrac{12}{13}$. **(5 p.)**

## Subiectul II

**1.** ***a)*** $\det A = 2 + 1 = 3$. **(5 p.)**

***b)*** Avem $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, deci $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

***c)*** Din $I_2 + xA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -x \\ x & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ x & 1+2x \end{pmatrix}$ avem $\det(I_2 + xA) = 3x^2 + 3x + 1$.

Cum $\Delta = 3^2 - 3\cdot 4 < 0$, rezultă $\det(I_2 + xA) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **(5 p.)**

**2.*a)*** *f* se divide cu $X + \hat{6} \Leftrightarrow f(\hat{1}) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{5} + a = \hat{0} \Leftrightarrow a = \hat{2}$. **(5 p.)**

***b)*** $f = X^4 + X^2 + \hat{2}(X^2 + 1) + X + a - \hat{2} = X^2(X^2 + \hat{1}) + \hat{2}(X^2 + \hat{1}) + X = (X^2 + \hat{1})(X^2 + \hat{2}) + X$, deci câtul împărţirii este $X^2 + \hat{2}$. **(5 p.)**

***c)*** Avem schema lui Horner

| | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ | $\boxed{\hat{0}}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{6}$ | $\hat{4}$ | |
| $\hat{2}$ | $\hat{1}$ | $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | |
| $\hat{3}$ | $\hat{1}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ | $\hat{4}$ | |
| $\hat{4}$ | $\hat{1}$ | $\hat{5}$ | $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | |
| $\hat{5}$ | $\hat{1}$ | $\hat{6}$ | $\hat{6}$ | $\boxed{\hat{0}}$ | |
| $\hat{5}$ | $\hat{1}$ | $\hat{4}$ | $\hat{5}$ | | |
| $\hat{6}$ | $\hat{1}$ | $\hat{5}$ | $\hat{1}$ | | |

Deci rădăcinile lui *f* din $\mathbb{Z}_7$ sunt $\hat{1}$ şi $\hat{5}$. **(5 p.)**

**Subiectul III**

**1.*a)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\infty$. **(5 p.)**

***b)*** Avem $f'(x)=\frac{(e^x+1)(x^2+1)-2x(e^x+x)}{(x^2+1)^2}$. Cum $f(0)=1$ şi $f'(0)=2$, rezultă că ecuaţia cerută este $y-1=2x \Leftrightarrow y=2x+1$. **(5 p.)**

***c)*** $f'(x)=\frac{e^x(x^2+1-2x)+x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)^2\cdot e^x+1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Cum $(x-1)^2\cdot e^x=0$ şi $1-x^2=0$, $\forall x\in(-1,1)$ rezultă că $f'(x)=0$, $\forall x\in(-1,1)$, deci $f$ este crescătoare pe $(-1, 1)$. **(5 p.)**

**2.*a)*** Fie $F$ o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)-\ln 2$. Atunci $g(x)=\int_1^x f(t)\,dt=$ $=F(x)-F(1)$. Rezultă că $g$ este derivabilă, $g(1)=F(1)-F(1)=0$ şi $g'(x)=F'(x)$, $F'(x)=f(x)=$ $=\ln(1+x^2)-\ln 2$, deci $g'(1)=0$. Rezultă că $g\in A$. **(5 p.)**

***b)*** Fie $F$ o primitivă a lui $f$ şi $G=F-F(1)$. Atunci $G$ este derivabilă, $G(1)=F(1)-F(1)=0$ şi cum $G'(x)=F'(x)=f(x)$, rezultă că $G(0)=f(1)=0$. Deci $G\in A$. Dacă $G_1$, $G_2$ sunt primitive lui $f$ cu $G_1\in A$, $G_2\in A$, atunci $G_1-G_2=c\in \mathbb{C}$, rezultă că $c=G_1(1)-G_2(1)=0-0=0$, deci $c=0$. Rezultă că $G_1=G_2$. Deci exact o primitivă a lui $f$ aparţine lui $G$. **(5 p.)**

***c)*** $\int_0^1 x\,f''(x)\,dx=x\,f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\,dx=f'(1)-f(x)\Big|_0^1=f'(1)-f(1)+f(0)=1$. **(5 p.)**