Testul 31

Subiectul I

1. Avem $256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{256}{128} = 2$. **(5 p.)**

2. Din $1 = -\frac{2a}{2}$ obținem $a = -1$. **(5 p.)**

3. Avem $\log_x x^2 = 2$, deci $x = 2$, care verifică condiția $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. **(5 p.)**

4. $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$, $C_5^4 = 5$, deci $30 - 5 = 25$. **(5 p.)**

5. Din $\sqrt{(a-1)^2 + (5-2)^2} = 5$ obținem $(a-1)^2 = 25 - 9 = 16$, deci $|a-1| = 4$. Rezultă $a = 5$ și $a = -3$. **(5 p.)**

6. Cum $\cos(180° - x) = -\cos x$, avem $\cos x \cos(180° - x) = -\cos^2 x \le 0$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** Avem $A^2 = O_2$ și $A^3 = O_2$ și $\det(A^3) = 0$. **(5 p.)**

b) Avem $I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(I_2 + A) = 1$ deci $(I_2 + A)^{-1} = (I_2 + A)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Cum $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$, dacă $X^2 = A$, atunci $a^2 + bc = d^2 + bc = b(a+d) = 0$ și $c(a+d) = 1$. Din ultima egalitate observăm că $a + d \neq 0$, deci $b(a+d) = 0$ implică $b = 0$. Atunci $a^2 = d^2 = 0 \Rightarrow a = d = 0$, contradicție cu $a + d \neq 0$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $f(\hat{1}) = \hat{1} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{3} = \hat{0}$. **(5 p.)**

b) Din schema lui Horner:

	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$

rezultă că $f = (X - \hat{1})(X^2 + \hat{3}X + 2) = (X - \hat{1})(X + \hat{1})(X + \hat{2}) = (X - \hat{1})(X - \hat{4})(X - \hat{3})$, deci rădăcinile lui *f* din $\mathbb{Z}_5$ sunt: $\hat{1}, \hat{3}, \hat{4}$. **(5 p.)**

c) Descompunerea lui *f* în factori ireductibili este $f = (X - \hat{1})(X - \hat{3})(X - \hat{4})$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** $f'(x) = 4x^3 + \ln x + 1$ și $f''(x) = 12x^2 + \frac{1}{x} > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, deci *f* este funcție convexă. **(5 p.)**

b) Cum $f(1) = 1$ și $f'(1) = 5$, ecuația tangentei în $A(1, 1)$ este $y - 1 = 5(x - 1) \Leftrightarrow y = 5x - 4$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^3 + \ln x + 1}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{12x^2 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (12x^3 + 1) = 1$. **(5 p.)**

2. ***a)*** Cum $F'(x) = f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, rezultă că F este crescătoare pe $(0, \infty)$. Cum $2 = \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9}$, rezultă că $F(2) \le F(\sqrt[3]{9})$. **(5 p.)**

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x^2 + x + 2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx = \int_0^1 \left(x + \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + x + 1) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \ln 3$. **(5 p.)**

c) $A = \int_0^a |f(x)|\,dx = \int_0^a \left(x + \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} \right) dx \le \int_0^a \left(x + \frac{2x+1}{3/4} \right) dx = \int_0^a \left(x + \frac{8x+4}{3} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{11x+4}{3} \right) dx =$

$= \left(\frac{11x^2}{6} + \frac{4}{3}x \right) \Big|_0^a = \frac{11a^2}{6} + \frac{4a}{3}$. **(5 p.)**