Testul 30

Subiectul I

1. Cum $x_1 + x_2 = x_1x_2 = -1$, avem $\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 1$. **(5 p.)**

2. Minimul este $y_v = -\frac{\Delta}{4} = \frac{3}{4}$. **(5 p.)**

3. Ecuația se scrie $\log_2 x = 4$, cu soluția $x = 2^4 = 16$, ce verifică condiția $x \in (0, \infty)$. **(5 p.)**

4. Sunt $A_4^4 - A_3^3 = 24 - 6 = 18$ numere. **(5 p.)**

5. Din $\frac{m+1}{1} = \frac{4m+3}{2}$ obținem $2m + 2 = 4m + 3 \Leftrightarrow 2m = -1$, deci $m = -\frac{1}{2}$. **(5 p.)**

6. $BC^2 = 9 + 49 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos A = 58 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{11}{14} = 58 - 33 = 25$, deci $BC = 5$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** Avem $B_1(1,2)$, $B_2(2,3)$, deci ecuația dreptei B_1B_2 este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = x + 1$. **(5 p.)**

b) Verificăm dacă $\begin{vmatrix} n & n+1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ p & p+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Într-adevăr, $n(m+1) + m(p+1) + p(n+1) - p(m+1) - m(n+1) -$

$-n(p+1) = 0$. **(5 p.)**

c) Aria triunghiului este $\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ n & n+1 & 1 \end{vmatrix}$. Cum $\Delta = 2 + n + 1 + n - 2n - (n+1) - 1 = -n + 1$,

avem $\frac{|-n+1|}{2} = 2 \Leftrightarrow |1 - n| = 4$ și $n \in \mathbb{N}$, deci $n = 5$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $f = X^5 - X^3 + X^2 - X - 2X + 1 = X^3(X^2 - 1) + X(X^2 - 1) - 2X + 1 = (X^2 - 1)(X^3 + X) - 2X + 1$, deci restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$ este $r = -2X + 1$. **(5 p.)**

b) Din primele două relații ale lui Viète rezultă că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 =$
$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - 2(x_1x_2 + \ldots + x_5x_6) = 0$. Cum $x_i^5 = 3x_i - 1$ pentru $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, rezultă că $x_i^6 = 3x_i^2 - x_i$ pentru $x \in \{1, 2, \ldots 5\}$. Prin însumare rezultă că $\sum x_i^6 = 3\sum x_i^2 - \sum x_i = 0$. **(5 p.)**

c) Avem $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)(X - x_5) \Rightarrow (4 - x_1^2)(4 - x_2^2)(4 - x_3^2)(4 - x_4^2)(4 - x_5^2) =$
$= (2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)(2 - x_4)(2 - x_5)(2 + x_1)(2 + x_2)(2 + x_3)(2 + x_4)(2 + x_5) = -f(2)\, f(-2) =$
$= 27 \cdot 25 = 675$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $f(x)=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} \Leftrightarrow f(x)=\frac{Ax+A+Bx+2B}{x^2+3x+2} \Leftrightarrow 4x+7=x(A+B)+A+2B,\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A+B=4$ şi $A+2B=7 \Leftrightarrow A=1$ şi $B=3$. **(5 p.)**

b) $f'(x)=\left(\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+1}\right)'=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{3}{(x+1)^2}<0$, $\forall x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{3}{(x+1)^2}\right)= -\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x+2)^2}+\frac{3x^2}{(x+1)^2}\right)=-1-3=-4$. **(5 p.)**

2.*a)* $f(2)=\int_0^1 \frac{t^2+1}{t+1}\,dt=\int_0^1 \frac{t^2-1+2}{t+1}\,dt=\int_0^1\left(t-1+\frac{2}{t+1}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}-t+2\ln(t+1)\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-1+2\ln 2=$

$=2\ln 2-\frac{1}{2}$. **(5 p.)**

b) $f(x+1)+f(x)=\int_0^1 \frac{t^{x+1}+t^x+2}{t+1}\,dt=\int_0^1 \frac{t^x(t+1)+2}{t+1}\,dt=\int_0^1 t^x\,dt+\int_0^1 \frac{2}{t+1}\,dt=\frac{t^{x+1}}{x+1}\Bigg|_0^1+2\ln(t+1)\Big|_0^1=$

$=\frac{1}{x+1}+2\ln 2=\frac{1}{x+1}+\ln 4$. **(5 p.)**

c) Cum $f(x+1)-f(x)=\int_0^1 \frac{t^{x+1}-t^x}{t+1}\,dt=\int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{t+1}\,dt\le 0$, deoarece $t\le 1$, rezultă că $f(x+1)\le f(x)$.

Rezultă că $2f(x)=f(x)+f(x+1)=\frac{1}{x+1}+\ln 4$, deci $f(x)\ge\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\ln 4=\frac{1}{2(x+1)}+\ln 2$. **(5 p.)**