Testul 3

Subiectul I

1. Din $x = \dfrac{3+y}{2}$, $y = \dfrac{x+8}{2}$ rezultă $x + y = \dfrac{11+x+y}{2}$, de unde $x + y = 11$. **(5 p.)**

2. Ecuația $f(x) = g(x)$ este echivalentă cu $3x + 2 = 5$, deci $x = 1$. Punctul cerut este $(1, 5)$. **(5 p.)**

3. Avem $\log_2 x(x+1) = \log_2 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$. Cum $x > 0$, obținem $x = 1$. **(5 p.)**

4. $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, deci $n(n-1) = 42$. Rezultă $n = 7$. **(5 p.)**

5. Punctul A aparține segmentului BC și $AB = 2AC$. Rezultă $BC = AB + AC = 3AC$, deci $\dfrac{BC}{AC} = 3$. **(5 p.)**

6. $\cos 140° = -\cos 40°$, deci $\cos^2 140° = \cos^2 40°$. Atunci $\sin^2 40° + \cos^2 40° = 1$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** Cum $A + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & -1 \\ 2 & 2+x \end{pmatrix}$, avem $\det(A + xI_2) = x^2 + 3x + 4 = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **(5 p.)**

b) Avem $AB = \begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ 2+2a & 2+2b \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a+2b & -a+2b \end{pmatrix}$. Din $1 - a = 3$ și $1 - b = 1$ rezultă $a = -2$ și $b = 0$, care verifică și $2 + 2a = a + 2b$ și $2 + 2b = -a + 2b$. **(5 p.)**

c) $BB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a-b & -a+b \end{pmatrix}$. Egalând cu $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rezultă $a = 1$ și $b = 2$. **(5 p.)**

1. ***a)*** $x * y \Leftrightarrow x^{\log_2 y} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ sau $\log_2 y = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $y = 1$. **(5 p.)**

b) Din punctul a) rezultă că „$*$“ este lege pe M.

• Asociativitatea: fie $x, y, z \in M$; atunci $(x * y) * z = x^{\log_2 y} * z = (x^{\log_2 y})^{\log_2 z} = x^{\log_2 y \cdot \log_2 z}$ și $x * (y * z) =$ $= x * y^{\log_2 z} = x^{\log_2 (y^{\log_2 z})} = x^{\log_2 z \cdot \log_2 y} = x^{\log_2 y \cdot \log_2 z} = (x * y) * z$.

• Elementul neutru: $e \in M$ este element neutru $\Leftrightarrow x*e = e*x = x \Leftrightarrow x^{\log_2 e} = e^{\log_2 x} = x$, $\forall x \in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_2 e = 1 \Leftrightarrow e = 2 \in M$.

• Simetrizabilitatea elementelor: $x \in M$ este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in M$ astfel încât $x*x' = x'*x = e \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^{\log_2 x'} = x'^{\log_2 x} = 2 \Leftrightarrow x' = 2^{\frac{1}{\log_2 x}} \in M$. Deci toate elementele lui M sunt simetrizabile. **(5 p.)**

c) $f(x) * f(y) = 2^x * 2^y = (2^x)^{\log_2(2^y)} = 2^{xy} = f(xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, deci f este morfism. Cum f este bijectivă, rezultă că f este izomorfism. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x}$, deci $\lim\limits_{x>0} f'(x) = -\infty$. **(5 p.)**

b) Cum $f'(x) = 3\dfrac{x^3 - 1}{x}$ și $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, avem tabloul de variație al lui f:

x	0	1	∞
$f'(x)$	– – – – – – – –	0	+ + + + + + + + +
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Rezultă că $x_0 = 1$ este punctul de minim global al lui f, deci $f(x) = f(1) = 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. **(5 p.)**

c) Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{g(x)-g(0)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt[3]{x^3-3\ln x-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt[3]{\frac{x^3-3\ln x-1}{(x-1)^3}}$. Din teorema lui l'Hospital avem

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{3x^2-\frac{3}{x}}{3(x-1)^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{3(x^3-1)}{x(x-1)^2} = 3\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2} = 3\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \infty$, deci $g'_d(1) = \infty$. Rezultă că g nu e derivabilă în $x_0 = 1$. **(5 p.)**

2. *a)* Avem $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2+x+1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{x^2-1} = f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. **(5 p.)**

b) Pentru $x \in (1,\infty)$ rezultă că $\int f(x)\,dx = 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = 2\ln(x+1) + \ln(x-1) + C$. **(5 p.)**

c) Cum $f(x) = 0$, $\forall x \in [2, 3]$, rezultă că $g(x) = 0$, $\forall x \in [2, 3]$, deci $A = \int_2^3 |g(x)|\,dx = \int_2^3 x f(x)\,dx =$

$= \int_2^3 \frac{3x^2-x}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 \frac{3(x^2-1)-x+3}{x^2-1}\,dx = \int_2^3 3\,dx - \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx + 3\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx = 3x\big|_2^3 - \frac{1}{2}\ln(x^2-1)\Big|_2^3 + 3\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3 =$

$= 3x\big|_2^3 - \frac{1}{2}\ln(x^2-1)\Big|_2^3 + 3\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3 = 3 - \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3} + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$. **(5 p.)**