Testul 29

Subiectul I

1. Într-adevăr, $\log_7 4+\log_7 3-\log_7 12=\log_7 \frac{4\cdot 3}{12}=\log_7 1=0$. **(5 p.)**

2. Avem $2x-1+1\le 3 \Leftrightarrow x\le \frac{3}{2}$, adică $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$. **(5 p.)**

3. Obţinem $6^x=36$, deci $x=2$. **(5 p.)**

4. Sunt $A_5^2=5\cdot 4=20$ de submulţimi ordonate cu două elemente. **(5 p.)**

5. Panta dreptei este $\frac{1}{2}$, deci $\frac{m-2}{2-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\frac{5}{2}$. **(5 p.)**

6. Avem $\cos 75^0=\sin 15^0$ şi $\cos 165^0=-\cos 15^0$, deci obţinem $\sin^2 15^0+\cos^2 15^0=1$. **(5 p.)**

Subiectul II

1*a)* $D(2,0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{vmatrix}=4-2=2$. **(5 p.)**

b) $D(a,2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 1 & a^2 & 4\end{vmatrix}=4a+a^2+2-a-2a^2-4=-a^2+3a-2$. Din $D(a,2)=-2$ rezultă $a(3-a)=0$, cu soluţiile $a=0$ şi $a=3$. **(5 p.)**

c) Avem $D(a,b)=ab^2+a^2+b-a-a^2b-b^2=ab(b-a)-(a+b)(b-a)+(b-a)=(b-a)(ab-a-b+1)=$ $=(b-a)(a-1)(b-1)$. Cei trei factori au suma $b-a+a-1+b-1=2b-2=2(b-1)$, care este număr par, deci măcar un termen este par. Atunci produsul este par, ceea ce trebuia arătat. **(5 p.)**

2*a)* $f=(x+3)(x^2+x+2)-13\Rightarrow$ câtul este x^2+x+2. **(5 p.)**

b) Fie $S_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Din relaţiile lui Viète rezultă că $S_1=x_1+x_2+x_3=-4$ şi $S_2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-10=6$. Cum $x_i^3=-4x_i^2-5x_i+7$ pentru $i\in\{1,2,3\}$, prin însumare obţinem $S_3=-4S_2-5S_1+21=-24+20+21=17$. Deoarece $x_i^4=-4x_i^3-5x_i^2+7x_i$ pentru $i\in\{1,2,3\}$, prin însumare obţinem $S_4=-4S_3-5S_2+7S_1=-68-30-28=-126$. **(5 p.)**

c) Avem $A=x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2)=x_1^2(-4-x_1)+x_2^2(-4-x_2)+x_3^2(-4-x_3)=-4S_2-S_3=$ $=-24-17=-41$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{2x^2+1}{x(x-a)}=\dfrac{1}{(-a)\cdot 0_-}=\begin{cases}-\infty, & a<0\\ +\infty, & a>0\end{cases}$, deci dreapta $x=0$ este asimptotă verticală, iar

$\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow a}\dfrac{2x^2+1}{x(x-a)}=\dfrac{2a^2+1}{a\cdot 0_-}=\begin{cases}\infty, & a<0\\ -\infty, & a>0\end{cases}$, deci dreapta $x=a$ este asimptotă verticală. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0, a\}$, nu există alte asimptote verticale. **(5 p.)**

b) $f'(x)=\dfrac{4x(x^2-ax)-(2x^2+1)(2x-a)}{x^2(x-a)^2}$. Cum $x_0=1$ este punct de extrem, rezultă că $f'(1)=0$, deci

$4(1-a)-3(2-a)=0 \Leftrightarrow -2-a=0 \Leftrightarrow a=-2$. **(5 p.)**

c) $f'(x)=\dfrac{-2ax^2-2x+a}{x^2(x-a)^2}=-\dfrac{2ax^2+2x-a}{x^2(x-a)^2}=-\dfrac{g(x)}{x^2(x-a)^2}$, unde $g(x)=2ax^2+2x-a$.

Cum $\Delta=4+8a^2>0$ rezultă că g are 2 rădăcini reale distincte $x_1<x_2$. Cum $a>0$ rezultă că $g(x)>0$, $\forall x\in(x_2,\infty)$. Fie $b=\max(x_2, a)$. Rezultă că $f'(x)<0$, $\forall x\in(b,\infty)$, deci f este descrescătoare pe (b,∞). **(5 p.)**

2.*a)* Cum $f(x)\le 0$, $\forall x\in[1,2] \Rightarrow A=\int_1^2 |f(x)|\,dx=-\int_1^2(1-x^2)\,dx=-1+\int_1^2 x^2\,dx=-1+\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_1^2=-1+\dfrac{7}{3}=\dfrac{4}{3}$. **(5 p.)**

b) $\int_{-1}^{1} x^5(1-x^2)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^5-x^7)\,dx=\left.\left(\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{x^8}{8}\right)\right|_{-1}^{1}=0$. **(5 p.)**

c) $\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}\,dx=\int_0^1 x'(1-x^2)^{n+1}\,dx=x(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1+2(n+1)\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx=$

$=2(n+1)\int_0^1(x^2-1+1)(1-x^2)^n\,dx=-2(n+1)\int_0^1 f^{n+1}(x)+2(n+1)\int_0^1 f^n(x)\,dx \Rightarrow (2n+3)\int_0^1 f^{n+1}(x)\,dx=$

$=(2n+2)\int_0^1 f^n(x)\,dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **(5 p.)**