Subiectul I

1. Avem $n^2-5n+6=(n-2)(n-3)$. Numerele întregi $n-3$ și $n-2$ sunt consecutive, deci nu pot fi de semne contrare. Așadar produsul este pozitiv. **(5 p.)**

2. Avem $f(x)=x \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Punctul este $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. **(5 p.)**

3. Ecuația revine la $x^2+5=3^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$ sau $x=-2$, care verifică ecuația. **(5 p.)**

4. Avem $2^5-2=30$. **(5 p.)**

5. Din $x+2x-6=0$ rezultă $x=2$, apoi $y=2$. Punctul este $P(2,2)$. **(5 p.)**

6. Triunghiul este dreptunghic în A, deoarece $AB^2+AC^2=BC^2$.

Atunci $\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **(5 p.)**

Testul 28

Subiectul II

1.*a)* $A+B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $\det(A+B)=2$ **(5 p.)**

b) Avem $\det A=1$ și $A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2.*a)* $f(x)=f(-x) \Leftrightarrow x^4+ax^3+5x^2+bx+1=x^4-ax^3+5x^2-bx+1 \Leftrightarrow 2ax^3+2bx=0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=b=0$. **(5 p.)**

b) f se divide cu $X-1 \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow a+b+7=0$, de unde $b=-10$. **(5 p.)**

c) $f=X^4+5X^2+X+1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$.

Rezultă că $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)(-1-x_4)=(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4)$, deci numărul cerut este $f(-1)=6$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $f(x)=3^x-\frac{1}{3^x}$, deci $f'(x)=3^x\ln 3+\frac{1}{3^x}\ln 3>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci nu are puncte de extrem. **(5 p.)**

b) $f''(x)=3^x\ln^2 3-\frac{1}{3^x}\ln^2 3=f(x)\ln^2 3$, deci $\frac{f''(x)}{f(x)}=\ln^2 3$. Avem $ax+b=\ln^2 3$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow a=0$ și $b=\ln^2 3$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=2\ln 3=\ln 9$. **(5 p.)**

2*a)* $\int f(x)\,dx=\int(x^2+e^x+2)\,dx=\frac{x^3}{3}+e^x+2x+C$, $x\in(0,\infty)$. **(5 p.)**

b) Cum $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=3=f(0)$, rezultă că f e continuă, deci are primitive pe $\mathbb{R}$. Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+3x+c_1, & x\le 0\\ \frac{x^3}{3}+e^x+2x+c_2, & x>0\end{cases}$. Cum F este continuă $\Rightarrow \lim\limits_{x\nearrow 0}F(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}F(x)$,

deci $c_1=1+c_2$. Deoarece $F(-2)=c_1-4=0$, rezultă că $c_1=4$, deci $c_2=3$.

Obținem $F(1)=\frac{1}{3}+e+2+3=e+\frac{16}{3}$. **(5 p.)**

c) $V_g=\pi\int_{-1}^{0}g^2(x)\,dx=\pi\int_{-1}^{0}(x+3)^2\,dx=\pi\left.\frac{(x+3)^3}{3}\right|_{-1}^{0}=\frac{19\pi}{3}$. **(5 p.)**