Testul 27

Subiectul I

1. Avem $a=\log_{2^2}2=\frac{9}{2}$ și $b=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, deci $a-b=4$. **(5 p.)**

2. Din $x^2+1\geq(x+1)^2+1$ rezultă $0\geq 2x+1$ deci $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$. **(5 p.)**

3. Avem $2x+3=9$, de unde $x=3$, ce verifică condiția $x\in\left[-\frac{3}{2},\infty\right)$. **(5 p.)**

4. $C_9^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=84$, $C_8^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56$ și $C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28$. Rezultatul este 0. **(5 p.)**

5. $AB=4-1=3$, $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$ și $CA=5-1=4$. Perimetrul este 12. **(5 p.)**

6. Cel mai mic unghi este B, deoarece AC este cea mai mică latură. Avem $\sin B=3/5$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. *a)* $\Delta(0)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=1+1=2$. **(5 p.)**

b) Avem $\Delta(x)=-x^2+x+1+1-x-x^2=2(1-x^2)$, deci ecuația $\Delta(x)=0$ are soluțiile $x=1$ și $x=-1$. **(5 p.)**

c) Avem $\Delta(a)=\Delta(b)\Leftrightarrow 2(1-a^2)=2(1-b^2)\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow |a|=|b|$. **(5 p.)**

2. *a)* $f(1)=0\Leftrightarrow 3a-3=0\Leftrightarrow a=1$. **(5 p.)**

b) Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=-a$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a$. Atunci $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2a$.
Cum $x_i^3=-ax_i^2-ax_i+4-a$ pentru $i\in\{1,2,3\}$, prin însumare rezultă că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-$
$-a(x_1+x_2+x_3)+12-3a=-a(a^2-2a)+a^2+12-3a=-a^3+3a^2-3a+12$.
Avem $-a^3+3a^2-3a+12=11\Leftrightarrow a^3-3a^2+3a-1=0\Leftrightarrow(a-1)^3=0\Leftrightarrow a=1$. **(5 p.)**

c) $f=X^3+X^2+X-3=(X-1)(X^2+2X+3)$. Polinomul $X-1$ este ireductibil deoarece are gradul 1, iar polinomul X^2+2X+3 este ireductibil pentru că are gradul 2 și $\Delta<0$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{xe^x}-2\right)=-2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=-2+\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$, deci graficul lui f nu are asimptote spre $+\infty$. **(5 p.)**

b) $f'(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x}=\frac{(e^x-1)^2}{e^x}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este crescătoare. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^3e^x}-\frac{1}{2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\infty$. **(5 p.)**

2. *a)* $\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+e^2}{4}$. **(5 p.)**

b) $\int_e^{e^2}\frac{f(x)}{x}\,dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx+\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\,dx=\ln(\ln x)\Big|_e^{e^2}+\ln x\Big|_e^{e^2}=\ln 2+2-1=1+\ln 2$. **(5 p.)**

c) $G'(x)=F'(x)-1=f(x)-1=\frac{1+\ln x}{\ln x}-1=\frac{1}{\ln x}>0$, $\forall x\in(1,\infty)$, deci G este funcție crescătoare. **(5 p.)**