# Testul 26

## Subiectul I

**1.** Avem $\sqrt[3]{3}=2^{1/3}$, deci $2^{\frac{1+2}{3}}-1=2-1=1$. **(5 p.)**

**2.** Avem $11+(1+2^1+\ldots+2^{10})=11+\dfrac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}+10$. **(5 p.)**

**3.** Este necesar ca $x\geq 1$. Ecuația devine $x+1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0$, cu soluția $x=3$. **(5 p.)**

**4.** $\log_2 1=0\in\mathbb{Z}$, $\log_2 2=1\in\mathbb{Z}$, $\log_2 4=2\in\mathbb{Z}$ iar $\log_2 3, \log_2 5\notin\mathbb{Z}$ (în caz contrar $3=2^n$ sau $5=2^n$, $n\in\mathbb{N}$, fals). Probabilitatea este $\dfrac{3}{5}$. **(5 p.)**

**5.** $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{O}$. **(5 p.)**

**6.** Avem $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$. **(5 p.)**

## Subiectul II

**1.** ***a)*** $\det A=1+2a$. **(5 p.)**

***b)*** Numărul $1+2a$ este impar, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, deci $\det A\neq 0, \forall a\in\mathbb{Z}$ și $A$ este inversabilă. **(5 p.)**

***c)*** Avem $\det A=1$, deci $A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

**2.** ***a)*** $X^4+X^2+X^3-2X+3X^2-3=X^2(X^2-1)+2X(X^2-1)+3(X^2-1)=(X^2-1)(X^2+2X+3)$, deci restul împărțirii lui $f$ la $X^2-1$ este 0. **(5 p.)**

***b)*** $f=(X-1)(X+1)(X^2+2X+3)$. Polinoamele $X-1$ și $X+1$ sunt ireductibile pentru că au gradul 1, iar polinomul $X^2+2X+3$ este ireductibil pentru că are gradul 2 și $\Delta<0$, deci nu are rădăcini în $\mathbb{R}$. **(5 p.)**

***c)*** Suma cerută $S=\dfrac{x_4^2+x_3^2+x_2^2+x_1^2}{x_1x_2x_3x_4}$.

Din relațiile lui Viète avem $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots-x_3x_4)=4-4=0$ și $x_1x_2x_3x_4=-3$. Deci $S=0$. **(5 p.)**

## Subiectul III

**1.** ***a)*** $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}x^5=0$; $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x}{\ln x}=0$, $f(0)=0$, deci $f$ este continuă în $x_0=0$. **(5 p.)**

***b)*** $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}x^4=0$, deci $f_s'(0)=0$

$\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{\ln x}=0\Rightarrow f_d'(0)=0$ **(5 p.)**

***c)*** $f'(x)=\begin{cases}5x^4, & x<0\\ \dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}, & x\in(0,\infty)\setminus\{1\}\end{cases}$ și $f'(0)=0$

Tabelul de variaţie a lui $f$ este:

| $x$ | $-\infty$            0       1       e            $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + + + + + + + + + + 0 − − − − − − 0 + + + + + + + + |
| $f(x)$ | ↗ max ↘ min ↗ |

Punctele de extrem sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = e$. **(5 p.)**

**2.*a)*** $\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2+1}\,dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2+1}\,dt = \int_1^2 \frac{t}{t^2+1}\,dt - \int_1^2 \frac{1}{t^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_1^2 - \operatorname{arctg} t\Big|_1^2 =$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}$. **(5 p.)**

***b)*** Cu substituţia $f'(x) = t$, rezultă că: $\int_0^1 f'(x) f''(x)\,dx = \int_{f'(0)}^{f'(1)} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{f'(0)}^{f'(1)} = \frac{(f'(1))^2 - (f'(0))^2}{2}$.

Cum $f'(x) = -\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{4}{25}$ şi $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Integrala este egală cu $\frac{1}{2}\left(\frac{16}{625} - \frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{8}{625} - \frac{1}{8} = \frac{-561}{5000}$. **(5 p.)**

***c)*** $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^4}\,dx = \frac{(x+1)^{-3}}{-3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{24}$. **(5 p.)**