Subiectul I

1. Avem $B=\{1,2,3,4,6,12\}$ şi $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,12\}$. Sunt 7 elemente. **(5 p.)**

2. Avem $4x^2-9>4x-9 \Leftrightarrow x(x-1)>0$, deci $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$. **(5 p.)**

3. $\log_6 2+\log_6 18=\log_6 36=2\in\mathbb{N}$. **(5 p.)**

4. $1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120$. Verifică două numere, deci probabilitatea este $\frac{2}{5}$. **(5 p.)**

5. Punctul de intersecţie este $P(4,-2)$. Distanţa este $AP=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=5$. **(5 p.)**

6. Cum $\sin 170°=\sin(180°-170°)=\sin 10°$, avem $\sin^2 170°+\cos^2 10^0=\sin^2 10°+\cos^2 10°=1$. **(5 p.)**

Subiectul II

Testul 25

1.a) Avem $\Delta(1,1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&2\\0&1&6\end{vmatrix}=1-2-6=-7$. **(5 p.)**

b) Cum $\Delta(x,y)=1-2x-6y$, avem $\begin{cases}x+\ y=2\\2x+6y=1\end{cases}$. Obţinem $x=11/4$ şi $y=-3/4$. **(5 p.)**

c) Numărul $\Delta(x,y)=1-2x-6y$ este impar, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{Z}$, deci este nenul. **(5 p.)**

2.a) $f(a)=f(-a) \Leftrightarrow a^4-3a^3-3a+1=a^4-3a^3+3a+1 \Leftrightarrow 6a^3-6a=0 \Leftrightarrow a(a^2-1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a\in\{0, 1, -1\}$. **(5 p.)**

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_3x_4)=9-2\cdot 0=9$. **(5 p.)**

c) Avem $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4+3x^3-3x+1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$. Cu substituţia $x-\frac{1}{x}=t$ ecuaţia devine $t^2+2+3t=0 \Rightarrow t_1=-1, t_2=-2$. Din $x-\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Din $x-\frac{1}{x}=-2 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.a) $f'(x)=2^x\ln+3^x\ln 3+5^x\ln x$ şi $f'(0)=\ln 2+\ln 3+\ln 5=\ln 30$. **(5 p.)**

b) $\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2^x+3^x+5^x-10}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2^x\ln 2+3^x\ln 3+5^x\ln 5)=2\ln 2+3\ln 3+5\ln 5$.

Deci, g este continuă în $x_0=1 \Leftrightarrow 2\ln 2+3\ln 3+5\ln 5=a$.. **(5 p.)**

c) Cum $f'(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este crescătoare. Atunci: $f(\sqrt{3})\le f(2)$, deci $2^{\sqrt{3}}+3^{\sqrt{3}}+5^{\sqrt{3}}-10\le$
$\le 4+9+25-10 \Rightarrow 2^{\sqrt{3}}+3^{\sqrt{3}}+5^{\sqrt{3}}\le 38$. **(5 p.)**

2.a) $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a(4x^3-4x)\,dx=(x^4-2x^2)\Big|_0^a=a^4-2a^2$.

Avem $a^4-2a^2=3 \Leftrightarrow (a^2-3)(a^2+1)=0 \Leftrightarrow a^2=3$, deci $a_{1,2}=\pm\sqrt{3}$. **(5 p.)**

b) Cum $F'(x)=f(x)=4x(x^2-1)\le 0$, $\forall x\in[0, 1]$, rezultă că F este descrescătoare pe $[0, 1]$.

Cum $0\le\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, rezultă că $F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\ge F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. **(5 p.)**

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2}{e^x}$. Din teorema lui l'Hospital avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-4x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{e^x}=0. \text{ (5 p.)}$$