Testul 24

Subiectul I

1. Avem $a+3=\dfrac{(a-1)+(2-3a)}{2} \Leftrightarrow a+3=-a+\dfrac{1}{2}$, de unde $a=-5/4$. **(5 p.)**

2. Din $f(1)=1$, $f(4)=3$ pentru $f(x)=ax+b$ găsim $a+b=1$, $4a+b=3$. Rezultă $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$ și

$f(n)<0 \Leftrightarrow \dfrac{2n+1}{3}<0 \Leftrightarrow n<-\dfrac{1}{2}$. Cel mai mare întreg este $n=-1$. **(5 p.)**

3. Avem $2^x+4\cdot 2^x=10 \Leftrightarrow 2^x=2$, deci $x=1$. **(5 p.)**

4. Cum $C_{18}^2=C_{18}^{16}$ și $C_{18}^3=C_{18}^{15}$ rezultatul este 0. **(5 p.)**

5. Din $3\vec{v_1}-2\vec{v_2}=-11\vec{j}$, rezultă că modulul este 11. **(5 p.)**

6. $\sin 155°=\sin(180°-155°)=\sin 25°=\sin(90°-65°)$, deci rezultatul este 0. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* Avem $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix}=a+1+2-2+1+a=2(a+1)$. **(5 p.)**

b) Avem $1+1+0=2$, $-1+1+0=0$ și $2-1+a\cdot 0=1$ oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$. **(5 p.)**

c) Pentru $a\neq -1$, avem $\Delta=2(a+1)\neq 0$, deci sistemul are soluție unică. Conform punctului anterior, acesta este (1,1,0). **(5 p.)**

2.*a)* Avem $f=X^3+2X^2-5X+1=X^3+X+2X^2+2-6X-1=X(X^2+1)+2(X^2+1)-6X-1=$
$=(X+2)(X^2+1)-6X-1$, deci restul împărțirii lui f la X^2+1 este $-6X-1$. **(5 p.)**

b) Cum $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ rezultă că $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=-1$. **(5 p.)**

c) Din primele două relații ale lui Viète avem: $x_1+x_2+x_3=-2$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5$. Obținem: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4+10=14$.

Cum $x_i^3=-2x_i^2+5x_i-3$, $i\in\{1,2,3\}$, prin însumarea celor 3 relații obținem:

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+5(x_1+x_2+x_3)-9=-28-10-9=-47$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e}{3}\right)^x\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3^x}}=0$ deci $y=0$ este ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$. **(5 p.)**

b) $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0} e^x\cdot\dfrac{1}{3^x-1}=-\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=+\infty$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^x}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\left(\dfrac{3}{e}\right)^x-\dfrac{1}{e^x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{e}\right)^x\ln\dfrac{3}{e}+e^x}=0$. **(5 p.)**

2.a) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{1+x^4}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\text{arctg } t + C = \frac{1}{2}\text{arctg } x^2 + C.$

Fie F primitiva lui f cu $F(0)=3$. Cum $F(x) = \frac{1}{2}\text{arctg } x^2 + c$ și $F(0)=c$, rezultă că $c=3$ și $F(x) = \frac{1}{2}\text{arctg } x^2 + 3$. **(5 p.)**

b) $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(1+x^4)'}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln 2$. **(5 p.)**

c) $\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx = x^3\ f(x)\Big|_0^1 - 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = f(1) - 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln 2$. **(5 p.)**