Testul 23

Subiectul I

1. Sunt $1+\frac{23-9}{2}=1+7=8$ termeni în progresie aritmetică (cu rația 2). Suma este $\frac{23+9}{2}\cdot 8=$ $=\frac{32}{2}\cdot 8=16\cdot 8=128$. **(5 p.)**

2. Din $f(-2)=1$ rezultă $4-2a+4=1$, deci $a=\frac{7}{2}$. Atunci $f(a)=2a^2+4=\frac{49}{2}+4=\frac{57}{2}$. **(5 p.)**

3. Avem $5^{1-x}=5^{2x}$, deci $x=1/3$. **(5 p.)**

4. Sunt $5!=120$ de permutări. **(5 p.)**

5. Avem $2(-1)+a-1=0 \Rightarrow a=3$. **(5 p.)**

6. Obținem $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+3}{4}=1$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* Avem $P_1(0,3)$, $P_2(1,5)$ și $P_1P_2: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -2x+y-3=0$. **(5 p.)**

b) Verificăm dacă $\begin{vmatrix} n-1 & 2n+1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$ Într-adevăr, $3(n-1)+2n+1-3-5(n-1)=2n-2-2(n-1)=0$. **(5 p.)**

c) Aria este $\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ n-1 & 2n+1 & 1 \end{vmatrix}=-3(n-1)$. Din $\frac{3|n-1|}{2}=3$ obținem $|n-1|=2$, deci $n=3$ și $n=-1$. **(5 p.)**

2.*a)* $r_1=f(-1)=1+7+a+7+1=a+16$ și $r_2=f(2)=4a-53$. Avem $a+16=4a-53 \Leftrightarrow 3a=69 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a=23$. **(5 p.)**

b) $S=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{x_1x_2x_3x_4}$. Cum din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ și $x_1x_2x_3x_4=1$, rezultă $S=7$. **(5 p.)**

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$. Cu notația $x+\frac{1}{x}=t$, ecuația devine $t^2-2-7t+14=0 \Leftrightarrow t^2-7t+12=0$ cu soluțiile $t_1=3$, $t_2=4$.

Avem $x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ și $x+\frac{1}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{3,4}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $f'(x)=3x^2-2x+a$ și $f''(x)=6x-2=0$, $\forall x\in\left[\frac{1}{3},\infty\right)$. **(5 p.)**

b) Cum $f'(0)=a$ și $f(0)=1 \Rightarrow$ ecuația tangentei în $A(0,1)$ este $y-1=ax \Leftrightarrow y=ax+1$, deci $a=3$. **(5 p.)**

c) $f'(x)=3x^2-2x+a=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow 4-12a\le 0\Leftrightarrow a\ge\frac{1}{3}\Rightarrow a\in\left[\frac{1}{3},\infty\right)$. **(5 p.)**

2.*a)* $\int g(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)\ln x}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\ln x=\frac{1}{2}\ln^2 x+\mathbf{C}$. **(5 p.)**

b) $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^e(x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}+x\right)'\ln x\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{e^3}{3}+$

$+e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{3}+1\right)\mathrm{d}x=\frac{e^3}{3}+e-\left(\frac{x^3}{9}+x\right)\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}+e-\frac{e^3}{9}-e+\frac{10}{9}=\frac{2e^3+10}{9}$. **(5 p.)**

c) Fie F o primitivă a lui f. Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(0)}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{4x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x^3}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)\ln x}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. **(5 p.)**