Testul 22

Subiectul I

1. Numărul este egal cu $2-\frac{1}{2^4}$ şi $1<2-\frac{1}{2^4}<2$, deci partea întreagă este 1. **(5 p.)**

2. Este necesar şi suficient ca $\Delta \le 0$. Avem $1-4m\le 0 \Leftrightarrow m\in\left[\frac{1}{4},\infty\right)$. **(5 p.)**

3. Avem $5^{2x}=5^{-3}$, deci $x=-\frac{3}{2}$. **(5 p.)**

4. Sunt $C_4^3=4$ submulţimi. **(5 p.)**

5. Avem $\overrightarrow{MA}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\vec{O}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$, deci $AC=AB$, ceea c trebuia arătat. **(5 p.)**

6. $AC^2=4+25-2\cdot2\cdot5\cos60°=4+25-10=19$, deci perimetrul este $7+\sqrt{19}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1*a)* Cum $A-7I_2=\begin{pmatrix}-6&-2\\-3&-1\end{pmatrix}$, avem $A(A-7I_2)=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&-2\\-3&-1\end{pmatrix}=O_2$. **(5 p.)**

b) $\det(A-mI_2)=\begin{vmatrix}1-m&-2\\-3&6-m\end{vmatrix}=(1-m)(6-m)-6=m^2-7m=m(m-7)$. Matricea $A-mI_2$ este neinversabilă pentru $m=0$ sau $m=7$. **(5 p.)**

c) Cum $A^2=7A$, avem $A^{100}=7^{99}A$ şi $\det(A^{100})=(7^{99})^2\det(A)=0$. **(5 p.)**

2*a)* $r=f(-1)=1+3+1=5$. **(5 p.)**

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{3}{1}=3$. **(5 p.)**

c) Din primele două relaţii ale lui Viète rezultă că $\sum x_i=0$ şi $\sum x_i^2=\left(\sum x_i\right)^2-2\sum_{i<j}x_ix_j=0$.

Fie $i\in\{1,2,3,4\}$. Cum $x_i^4-3x_i+1=0$, rezultă că $x_i^4=3x_i-1$, deci $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=-4$. Deoarec $x_i^5-3x_i^2+x_i=0$, $i=\overline{1,4}$, rezultă că $x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=3\sum x_i^2-\sum x_i=0$. Deci $\sum x_i^4=\sum x_i^5-4$. **(5 p.)**

Subiectul III

1*a)* $\lim_{x\nearrow1}f(x)=e-1\in\mathbb{R}$. $\lim_{x\searrow1}f(x)=\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală. Cum continuă pe R \ {1} rezultă că nu există altă asimptotă verticală. **(5 p.)**

b) $f'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$ şi $f''(x)=e^x-\frac{2}{x^3}>0$ $\forall x\in(-\infty,0)$, deci f este convexă pe $(-\infty,0)$. **(5 p.)**

c) $\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot\ln x=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. **(5 p.)**

2*a)* $\int_2^3\frac{(x-1)^2}{x^3-3x+2}\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x=\ln(x+2)\Big|_2^3=\ln\frac{5}{4}$. **(5 p.)**

b) Din teorema lui l'Hospital avem $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{4x^3}=\frac{1}{4}$. **(5 p.)**

c) Deoarece $g(x)=(x-1)^2(x+2)\ln x=0$, $\forall x\in[1,e]$, rezultă că $A=\int_1^e g(x)\mathrm{d}x=$

$$=\int_1^e(x^3-3x+2)\ln x\,\mathrm{d}x\int_1^e\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)'\ln x=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x\Bigg|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\ln x\Bigg|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\frac{1}{x}dx=\frac{e4}{4}-\frac{3e^2}{2}+2e-\int_1^e\left(\frac{x^3}{4}-\frac{3x^2}{2}+2\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{e^4}{4}-\frac{3e^2}{2}+2e-\left(\frac{x^4}{16}-\frac{3x^2}{4}+2x\right)\Bigg|_1^e=\frac{e^4}{4}-\frac{3e^2}{2}+2e-\frac{e^4}{16}+\frac{3e^2}{4}-2e+\frac{1}{16}-\frac{3}{4}+2=\frac{3e^4}{16}-\frac{3e^2}{4}+\frac{21}{16}.\ \textbf{(5 p.)}$$