Subiectul I

1. Termenii sunt în progresie aritmetică de rație 3, sunt $1+\frac{100-4}{3}=1+\frac{96}{3}=1+32=33$. **(5 p.)**

2. Avem $f(a)=a+1 \Leftrightarrow 1-3a=a+1$, de unde $a=0$. **(5 p.)**

3. Ecuația se scrie $\log_2 x+2=3 \Leftrightarrow \log_2 x=1$, de unde $x=2$, ce verifică condiția $x\in(0,\infty)$. **(5 p.)**

4. Avem $1+3!+3!=1+6+6=13$. **(5 p.)**

5. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$, cu lungimea $\left|2\overrightarrow{AD}\right|=2\cdot 2=4$. **(5 p.)**

6. $\sin(90^\circ-30^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **(5 p.)**

Testul 21

Subiectul II

1.a) $\det A=-1$. **(5 p.)**

b) Avem $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ și $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix}$. Atunci $A^3+I_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}=2A$. **(5 p.)**

c) Cum $I_3=2A-A^3=A\left(2I_2-A^2\right)$, rezultă $A^{-1}=2I_2-A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2.a) $r=f(-2)=-8+8+6+a=a+6$. Atunci $r=4 \Leftrightarrow a+6=4 \Leftrightarrow a=-2$. **(5 p.)**

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=4+6=10$. **(5 p.)**

c) Pentru $a=-6$ rezultă că restul împărțirii lui f la $X+2$ este 0. Din schema lui Horner, rezultă că

	1	2	–3	–6
–2	1	0	–3	0

$f=(X+2)(X^2-3)=(X+2)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, deci $y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, deci $y=2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$. **(5 p.)**

b) $f'(x)=\frac{e^x(1+e^x)-(2+e^x)e^x}{(1+e^x)^2}=-\frac{e^x}{(1+e^2)^2}<0$, $\forall x\in$ R, deci f este descrescătoare. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+e^x)f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+e^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2+e^x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$. **(5 p.)**

2.a) $g(x)=\frac{x(2x^2+5)}{x^4+5x^2+4}=\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^4+5x^2+4)'}{x^4+5x^2+4}$, deci

$\int g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^4+5x^2+4)'}{x^4+5x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^4+5x^2+4)+\mathrm{C}$. **(5 p.)**

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(x^2+4)-(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)dx=$

$=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$. **(5 p.)**

c) $V_f=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+1)^2}\,dx\ge\pi\int_0^1\frac{1}{(1+4)^2(1+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{100}>\frac{3}{100}$. **(5 p.)**