Testul 20

Subiectul I

1. Rația este $q=\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{2}{3}$; al cincilea termen este egal cu 1. **(5 p.)**

2. Ecuația $f(x)=0$ nu are soluții, deoarece $\Delta=(-1)^2-4=-3<0$, deci rezultă cerința. **(5 p.)**

3. Avem $\log_2\dfrac{x+1}{x}=2$, de unde $\dfrac{x+1}{x}=4$. Obținem $x=1/3$, care verifică ecuația. **(5 p.)**

4. $C_5^4=5,\ C_6^5=6,\ C_{22}^{21}=22$ și rezultatul este $\dfrac{1}{2}$. **(5 p.)**

5. Din $\dfrac{m-2}{2-1}=3$ rezultă $m=5$. **(5 p.)**

6. Avem $\sin 40°=\sin\left(180°-40°\right)=\sin 140°$, deci al doilea factor este 0. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** De exemplu $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) Fie $A,B\in M$. Există $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}c & d\\ d & c\end{pmatrix}$.

Avem $AB=\begin{pmatrix}ac+bd & ad+bc\\ ad+bc & ac+bd\end{pmatrix}=BA$. **(5 p.)**

c) Fie $x,y\in\mathbb{R},\ X=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}\in M$. Avem $X^2=\begin{pmatrix}x^2+y^2 & 2xy\\ 2xy & x^2+y^2\end{pmatrix}$, deci $x^2+y^2=5$ și $2xy=4$. De aici

$(x+y)^2=5+4=9$; $(x-y)^2=5-4=1\Rightarrow x+y=\pm3,\quad x-y=\pm1$. Obținem $x_{1,2}=\pm\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,

$x_{3,4}=\pm\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2. ***a)*** Fie $x\in\mathbb{Z}_6$. Atunci $A(x)=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{4}\\ \hat{5} & \hat{4}\end{pmatrix}=I_2+xE$, unde $E=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{4}\\ \hat{5} & \hat{4}\end{pmatrix}$. Cum $E^2=0_2$ rezultă

că $A(x)\,A(y)=(I_2+xE)(I_2+yE)=I_2+xE+yE+xyE^2=I_2+(x+y)E=A(x+y)$. **(5 p.)**

b) Din punctul a) rezultă că înmulțirea matricelor este lege pe M. Cum înmulțirea matricelor este asociativă, $I_2=A(0)\in M$ și $A(x)\cdot A(-x)=A(-x)\,A(x)=A(0)$, $\forall x\in\mathbb{Z}_6$, rezultă că $(M,\cdot)$ este grup. **(5 p.)**

c) Fie $X=A(x),\ X\in\mathbb{Z}_6$, rezultă că $X^6=A(\hat{6}x)=A(0)=I_2$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** $\lim\limits_{x\nearrow1}f(x)=a+2$; $\lim\limits_{x\searrow1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{1}{x}=1$ și $f(1)=a+2$. f este continuă în $x_0=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+2=1\Leftrightarrow a=-1$. **(5 p.)**

b) Dacă $a\neq-1$, atunci f nu e continuă în $x_0=1$, deci nu e derivabilă în $x_0=1$.

Dacă $a=-1$, atunci $\lim\limits_{x\nearrow1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\nearrow1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\nearrow1}\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$ și

$\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{\dfrac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\searrow1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\searrow1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Deoarece derivatele laterale ale lui f în punctul $x_0=1$ sunt diferite, rezultă că f nu e derivabilă în $x_0=1$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{2x-1}=0$. **(5 p.)**

2.a) $\int_0^1 (f(x)+f'(x))\,dx = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(x^3-x)(x^2+1)+x}{x^2+1}\,dx + f(x)\Big|_0^1 =$

$= \int_0^1 \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right)dx + f(1) - f(0) = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. **(5 p.)**

b) $V_g = \pi\int_0^1 g^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 x^{10}dx = \pi\,\frac{x^{11}}{11}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{11}$. **(5 p.)**

c) $\int_0^1 x^2 f''(x)\,dx = x^2 f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2x\,f'(x)\,dx = f'(1) - 2x\,f(x)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 f(x)\,dx = f'(1) - 2f(1) + 2\int_0^1 f(x)\,dx =$

$= f'(1) - 2f(1) + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} = 2 - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$, deoarece $f'(x) = \frac{5x^4(x^2+1) - 2x^6}{(x^2+1)^2}$ şi

$f'(1) = 2$. **(5 p.)**