Testul 2

Subiectul I

1. Avem $\sqrt[3]{3^3}+\sqrt{4}+\sqrt{16}=3+2+4=9$. **(5 p.)**

2. Coordonatele sunt $x_V=-\frac{1}{4}$, $y_V=-\frac{1}{8}$. **(5 p.)**

3. Ecuația se scrie $|x+1|=2$. Avem soluțiile $x=1$ și $x=-3$. **(5 p.)**

4. Mulțimea $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ are 6 elemente și $6!=720$ permutări. **(5 p.)**

5. $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{4}{1}=4$. **(5 p.)**

6. $BC^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 60°=9+16-12=13$, deci $BC=\sqrt{13}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* $A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A+A^t=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ deci $\det(A+A^t)=8-2=6$. **(5 p.)**

b) Avem $A^2=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ deci $A^3-3A^2+3A-I_3=$

$$=\begin{pmatrix}1-3+3-1&3-6+3&0\\0&1-3+3-1&0\\0&0&1-3+3-1\end{pmatrix}=O_3.$$

Altfel, avem $A-I_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $(A-I_3)^3=O_3$. **(5 p.)**

c) Cum $A(A^2-3A+3I_3)=I_3$, avem $A^{-1}=A^2-3A+3I_3=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2.*a)* $\frac{1}{3}(x+6)(y+6)-6=\frac{1}{3}(xy+6x+6y+36)-6=\frac{1}{3}xy+2x+2y+6=x*y$. **(5 p.)**

b) Fie $x,y\neq-6$. Dacă $x*y=-6\Rightarrow\frac{1}{3}(x+6)(y+6)=0\Rightarrow x=-6$ sau $y=-6$, fals. Deci $x*y\in M$. **(5 p.)**

c) Din punctul b) rezultă că legea „$*$" este lege pe M.

i) Asociativitatea: $(x*y)\quad *z=\left(\frac{1}{3}(x+6)(y+6)-6\right)*z=\frac{1}{9}(x+6)(y+6)(z+6)-6$ și $x*(y*z)=$

$$=x*\left(\frac{1}{3}(y+6)(z+6)-6\right)=\frac{1}{9}(x+6)(y+6)(z+6)-6=(x*y)*z.$$

ii) elementul neutru: Fie $e\in M$ este element neutru $\Leftrightarrow x*e=e*x=x,\ \forall x\in M\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}(x+6)(e+6)-6=x\Leftrightarrow\frac{1}{3}(x+6)(e+6)=x+6\Leftrightarrow e+6=3\Leftrightarrow e=-3\in M$.

iii) simetrizabilitatea elementelor: Fie $x\in M$. Atunci $x*x'=x'*x=e\Leftrightarrow\frac{1}{3}(x+6)(x'+6)=3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'+6=\dfrac{9}{x+6}\Leftrightarrow x'=-6+\dfrac{9}{x+6}\in M$, deci toate elementele lui M sunt simetrizabile. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* Din teorema lui l'Hospital avem: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$, deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. **(5 p.)**

b) Avem $f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2-3)e^x}{e^{2x}} = -\frac{x^2-2x-3}{e^x}$ şi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$. Din tabloul de variaţie a lui f rezultă că punctele de extrem ale lui f sunt -1 şi 3. **(5 p.)**

c) Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty, f(-1) = -2e,\ f(3) = \frac{6}{e^3}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi din monotonie, rezultă că $f(x) = -2e > -6$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. **(5 p.)**

2.*a)* $F \in \int f(x)\,dx = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$. Rezultă că $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$. Cum $F(1) = 2$, rezultă că $c = 2$, deci $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + 2$. **(5 p.)**

b) Deoarece $\ln x \le 0$ pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, rezultă că $f(x) \le 0$ pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Atunci $A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |\, f(x)\,|\,dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\ln^2 x\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2}\ln^2\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2}$. **(5 p.)**

c) Avem $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln^2 x\,dx = -\frac{1}{x}\ln^2 x\,\Big|_1^e + 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{e} + 2\int_1^e \frac{1}{x^2}\ln x\,dx = -\frac{1}{e} +$
$+ 2\int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x\,dx = -\frac{1}{e} - 2\frac{1}{x}\ln x\,\Big|_1^e + 2\int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{3}{e} - \frac{2}{x}\Big|_1^e = 2 - \frac{5}{e}$. **(5 p.)**