Testul 19

Subiectul I

1. Avem $a_5 - a_3 = 2\cdot 4 = 8$. Cum $a_3 + a_5 = 10$, avem $a_3 = 1$ şi $a_1 = a_3 - 2\cdot 4 = 1 - 8 = -7$. **(5 p.)**

2. Căutăm $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$. Din $f(0) = 4$ rezultă $b = 4$ şi din $f(2) = 0$ obţinem $2a + 4 = 0$, deci $a = -2$. Atunci $f(x) = -2x + 4$. **(5 p.)**

3. Avem $2^x = 3 - 2\cdot 2^x \Leftrightarrow 3\cdot 2^x = 3 \Leftrightarrow 2^x = 1$, cu soluţia $x = 0$. **(5 p.)**

4. Sunt 90 de numere naturale de două cifre şi $5\times 5 = 25$ de numere cu ambele cifre impare. Probabilitatea este $\frac{25}{90} = \frac{5}{18}$. **(5 p.)**

5. Cum $4\vec{u} - 5\vec{v} = 8\vec{i} - 12\vec{j} - 5\vec{i} + 5\vec{j} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$, modulul este $\sqrt{9+49} = \sqrt{58}$. **(5 p.)**

6. $NP^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120° = 9 + 25 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 = 49$, deci $NP = 7$. Perimetrul este $3 + 5 + 7 = 15$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** Fie $X \in M, X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$. Avem $AX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+a & -b+b \\ a-a & b-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) $A + mI_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$, trebuie ca $m - 1 = 1$, deci $m = 2$. **(5 p.)**

c) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \in M$. Avem $XA = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & a-b \\ -a+b & a-b \end{pmatrix} \in M$, căci elementele pe fiecare coloană sunt egale. **(5 p.)**

2. ***a)*** Fie $A = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$, $B = \begin{pmatrix} c & \hat{2}d \\ d & c \end{pmatrix} \in M$. Atunci $AB = \begin{pmatrix} ac + \hat{2}bd & \hat{2}(ad+bc) \\ ad + bc & ac + \hat{2}bd \end{pmatrix} \in M$. **(5 p.)**

b) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$, atunci $\det(A) = \hat{0} \Leftrightarrow a^2 - \hat{2}b^2 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{2}b^2 = a^2$. Dacă $b \neq \hat{0}$, rezultă că $(ab^{-1})^2 = \hat{2}$, fals pentru că $H = \{x^2 \mid x \in \mathbf{Z}_5\} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\}$. Rezultă $b = \hat{0}$, $a = \hat{0}$, deci $A = O_2$. **(5 p.)**

c) Fie $X = \begin{pmatrix} x & \hat{2}y \\ y & x \end{pmatrix}$. Atunci $X^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 + \hat{2}y^2 & \hat{4}xy \\ \hat{2}xy & x^2 + \hat{2}y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^2 + \hat{2}y^2 = \hat{1}$ şi $xy = \hat{0}$.

Dacă $x = \hat{0} \Rightarrow \hat{2}y^2 = \hat{1} \Rightarrow y^2 = \hat{3}$, fals pentru că $\hat{3} \notin \{x^2 \mid x \in \mathbf{Z}_5\}$. Dacă $y = \hat{0}$ rezultă că $x^2 = \hat{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - \hat{1})(x + \hat{1}) = \hat{0} \Leftrightarrow x = \hat{1}$ sau $x = \hat{4}$. Obţinem soluţiile $X_1 = I_2$ şi $X_2 = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix} = -I_2$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+1}{3x-2} + e^x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{3x-2} = \frac{4}{3}$. **(5 p.)**

b) Avem $f'(x) = \frac{4(3x-2) - 3(4x+1)}{(3x-2)^2} + e^x = -\frac{11}{(3x-2)^2} + e^x$.

Cum $f(0) = \frac{1}{2}$ şi $f'(0) = 1 - \frac{11}{4} = -\frac{7}{4}$, rezultă că ecuaţia tangentei este $y - \frac{1}{2} = -\frac{7}{4}x$. **(5 p.)**

c) $f''(x) = \frac{66}{(3x-2)^3} + e^x > 0$ pentru $x \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, deci f este convexă pe $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $f(x) = F'(x) = (2x+4)e^x + (x^2 + 4x + 6)e^x = (x^2 + 6x + 10)e^x, x \in \mathbb{R}$. **(5 p.)**

b) $\int_0^1 (x+3)^2 e^x = \int_0^1 (x^2 + 6x + 9)e^x \, dx = \int_0^1 (x^2 + 6x + 10)e^x dx - \int_0^1 e^x \, dx = F(x)\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = F(1) - F(0) - e + 1 =$

$= 11e - 6 - e + 1 = 10e - 5$. **(5 p.)**

c) Fie G o primitivă a lui F. Atunci, din teorema lui l'Hospital avem: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2e^x}\int\limits_0^x F(t)\,\mathrm{d}t =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{G(x)-G(0)}{x^2e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{2xe^x+x^2e^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+6}{x^2+2x} = 1.$ **(5 p.)**