Testul 18

Subiectul I

1. Cum $\frac{6}{\sqrt{10}-2}=\frac{6(\sqrt{10}+2)}{6}=2+\sqrt{10}$ și $3=\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}=4$ avem $5<\frac{6}{\sqrt{10}-2}<6$. Rezultatul cerut este 5. **(5 p.)**

2. Avem $\Delta=9$ și $x_1=2, x_2=1/2$. **(5 p.)**

3. Ecuația $f(x)=m$, cu $m\in\mathbb{R}$ arbitrar, are unica soluție $x=\frac{3-m}{2}$, deci *f* este inversabilă. **(5 p.)**

4. Cum $C_{n+2}^2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, avem $(n+2)(n+1)=42=7\cdot 6$. Numerele naturale consecutive $n+1$ și $n+2$ trebuie să fie egale cu 6, respectiv 7, deci $n=5$. **(5 p.)**

5. O este mijlocul diagonalelor *AC* și *BD*, deci $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$. Prin sumare obținem concluzia. **(5 p.)**

6. Cum $\cos 140°=-\cos(180°-40°)=-\cos 40°$, avem $\sin^2 40°+\cos^2 140°=\sin^2 40°+\cos^2 40°=1$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0$, deci sistemul este compatibil. **(5 p.)**

b) Adunând toate relațiile avem $2(x+y+z)=0$, deci $x+y+z=0$. Atunci $x=0-(y+z)=0-(-1)=1$, $y=0-(x+z)=1$, $z=-2$. **(5 p.)**

c) Cerința este verificată dacă $x_0=y_0$ sau $x_0=z_0$ sau $y_0=z_0$. În primul caz avem $x_0=y_0=1$ (din prima ecuație), de unde $a=y_0+z_0=x_0+z_0=-1$, care verifică. Dacă $x_0=z_0$, obținem o contradicție din primele două ecuații: $2=-1$. În cazul $y_0=z_0=-1/2$ rezultă $x_0=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ și $a=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$.

În concluzie $a=-1$ și $a=2$. **(5 p.)**

2.*a)* $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}\cdot\hat{5}\cdot\hat{6}=\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot(-\hat{2})(-\hat{3})(-\hat{1})=-\widehat{36}=-\hat{1}=\hat{6}$. **(5 p.)**

b) $x^2+\hat{3}x+\hat{3}=\hat{0} \Leftrightarrow x^2-\hat{4}x+\hat{3}=\hat{0} \Leftrightarrow (x-\hat{1})(x-\hat{3})=\hat{0}$. Cum $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ este corp, rezultă că soluțiile sunt $x_1=\hat{1}$ și $x_2=\hat{3}$. **(5 p.)**

c) De asemenea, $f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{4}=\hat{5}$ și $f(\hat{2})=\hat{4}+\hat{1}=\hat{5}$ rezultă că *f* nu e injectivă. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x\downarrow -2}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\uparrow -2}f(x)=-\infty$. **(5 p.)**

b) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$, deci $y=x+1$ este ecuația asimptotei oblice. **(5 p.)**

c) $f'(x)=\frac{(2x+3)(x+2)-x^2-3x-1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2}=1+\frac{1}{(x+2)^2}$ și $f''(x)=-\frac{2}{(x+2)^3}>0$, $\forall x\in(-\infty,-2)$. **(5 p.)**

2.*a)* $\int_1^e F(x)\,dx = \int_1^e \ln x\,dx + \int_1^e x\,dx = \int_1^e x'\ln x\,dx + \int_1^e x\,dx = x\ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx + \int_1^e x\,dx = \frac{e^2+1}{2}$. **(5 p.)**

b) Funcția F este primitivă a unei funcții $f \Leftrightarrow F$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Cum $F'(x) = \begin{cases} a, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+1, & x>1 \end{cases}$ rezultă că F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ â $\{1\}$. $\lim\limits_{x\searrow 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\searrow 1}\frac{\ln x + x - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\searrow 1}\left(\frac{1}{x}+1\right) = 2$, deci $F_d'(1) = 2$, $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{ax-2}{x-1}$. Dacă $a \neq 2$ rezultă că $F_s'(1)$ este infinită. Dacă $a = 2$ rezultă că $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$, deci $F_s'(1) = 2$. Rezultă că F este derivabilă în $x_0 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 2$. **(5 p.)**

c) $\int_1^e \frac{x+1}{x\,F(x)}\,dx = \int_1^e \frac{1+\frac{1}{x}}{F(x)}\,dx = \int_1^e \frac{F'(x)}{F(x)}\,dx = \ln F(x)\,\Big|_1^e = \ln F(e) - \ln F(1) = \ln(e+1)$. **(5 p.)**