Testul 17

Subiectul I

1. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=9+8=17$. **(5 p.)**

2. Ecuaţia este echivalentă cu:

a) $f(x)-g(x)=f(x)+g(x) \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=2/3$ sau cu

b) $f(x)-g(x)+f(x)+g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Soluţiile sunt $x=-1$ şi $x=2/3$. **(5 p.)**

3. Ecuaţia se scrie $x^2+7=2^4 \Rightarrow x^2=9$, deci $x=3$ sau $x=-3$. **(5 p.)**

4. Cum $C=\{1,2\}$, sunt $2^2=4$ submulţimi. **(5 p.)**

5. Panta este $-\dfrac{m}{m+1}$. Rezultă $2(m+1)=-m$, de unde $m=-2/3$. **(5 p.)**

6. $BC^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\cos30°=8-8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8-4\sqrt{3}$. Rezultă $BC=2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* $A^2=0_2$. **(5 p.)** ***b)*** Din $(I_2+2A)(I_2-2A)=I_2-4A^2=I_2$ rezultă cerinţa. **(5 p.)**

c) Avem $A-xI_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-x & 1\\ -2 & -\sqrt{2}-x\end{pmatrix}$ şi $\det(A-xI_2)=x^2-2+2=x^2$. Atunci $x^2=4$ atrage $x=2$ şi $x=-2$. **(5 p.)**

2.*a)* $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1} \Leftrightarrow \hat{2}x=-\hat{4} \Leftrightarrow \hat{2}x=\hat{4}$.

Tabla înmulţirii cu $\hat{2}$ este

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{6}$	$\hat{7}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{6}$

Soluţiile sunt $x_1=\hat{2}$ şi $x_2=\hat{6}$. **(5 p.)**

b) Cum $\hat{0}^3=\hat{2}^3=\hat{4}^3=\hat{6}^3=\hat{0}$; $\hat{1}^3=\hat{1}, \hat{3}^3=\hat{3}, \hat{5}^3=\hat{5}, \hat{7}^3=\hat{7}$ rezultă $H=\{\hat{0},\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}\}$, deci suma elementelor lui H este 0. **(5 p.)**

c) Din punctul b) rezultă că unicul element $x\in\mathbb{Z}_8$ cu $x^3=\hat{3}$ este $x=\hat{3}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6e^{x+1}-(x+1)^3-3(x+1)^2}{6e^x-x^3-3x^2}=e$. **(5 p.)**

b) $f'(x)=6e^x-3x^2-6x$ şi $f''(x)=6e^x-6x-6$. Cum $f'''(x)=6(e^x-1)$, rezultă din tabelul de variaţie a lui f'' că $f''(x)=f''(0)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este convexă. **(5 p.)**

c) Tabelul de variaţie a lui f este:

x	$-\infty$		0		∞
$f''(x)$		+ + + + + + +	0	+ + + + + + + + +	
$f'(x)$		$\nearrow$	0		
$f(x)$		− − − − − − − −	0	+ + + + + + + +	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Din tabel, rezultă că 0 este unicul punct de minim al lui f. **(5 p.)**

2. ***a)*** $\int_{-1}^{1} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\, f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x$. Cu substituția $x = -t$ obținem $\int_{-1}^{0} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{1}^{0} -t\, f(-t)\, \mathrm{d}t =$

$= -\int_{0}^{1} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$, deci $\int_{-1}^{1} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} t\, f(t)\, \mathrm{d}t + \int_{0}^{1} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = 0$. **(5 p.)**

b) $V = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{2} (4 - x^2)\, \mathrm{d}x = 2\pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = 2\pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32\pi}{3}$. **(5 p.)**

c) Cu substituția $4 - x^2 = t$, integrala devine $-\frac{1}{2} \int_{4}^{0} (4 - t)\sqrt{t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{0}^{4} (4t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}})\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\sqrt{t^3} - \frac{2}{5}\sqrt{t^5} \right) \Bigg|_0^4 =$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5} \right) = \frac{64}{15}$. **(5 p.)**