Testul 16

Subiectul I

1. Cum $0 < a < 1$, avem $|a-1| = 1-a$, $|a+1| = a+1$ și $|a-1| + |a+1| = 2$. **(5 p.)**

2. Din $2a-3+2a-1+2a+1>0$ rezultă $6a>3 \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$. Obținem $a=1$. **(5 p.)**

3. Avem $x+1<2^4$ și $x+1>0$, deci $x \in (-1,15)$. **(5 p.)**

4. Numerele $f(1), f(2), f(3)$ sunt distincte, deci egale cu 4,5,6. Atunci $f(1)+f(2)+f(3)=15$. **(5 p.)**

5. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$. Cum $AB=3$, avem $AD = \frac{12}{3} = 4$. Atunci lungimea vectorului $\overrightarrow{DB}$ este $DB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. **(5 p.)**

6. $\sin(180° - x) = \sin x$, deci $\sin x \cdot \sin(180° - x) = \sin^2 x \geq 0$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** $\det A = 1$. **(5 p.)**

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de unde rezultă cerința. **(5 p.)**

c) Cum $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avem $A + A^2 + mA^3 = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ și $\det(A + A^2 + mA^3) = m^3 + 2 - 3m =$ $= (m+2)(m-1)^2$. Obținem $m=1$ și $m=-2$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $x \circ (y * z) = x \circ (y+z+4) = x(y+z+4) + 4x + 4(y+z+4) + 12 = xy + xz + 8x + 4y + 4z + 28$, iar $(x \circ y) * (x \circ z) = (xy + 4x + 4y + 12) * (xz + 4x + 4z + 12) = xy + xz + 8x + 4y + 4z + 28$. **(5 p.)**

b) $x \circ y = -4 \Leftrightarrow xy + 4x + 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(y+4) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ sau $y = -4$. **(5 p.)**

c) Cum $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ și $(x \circ y) \circ z = ((x+4)(y+4) - 4) \circ z = (x+4)(y+4)(z+4) - 4$, rezultă că $(x \circ x) \circ x = (x+4)^3 - 4$. Avem $(x * x) * x = (2x+4) * x = 3x + 8$ și ecuația devine $(x+4)^3 - 4 =$ $= 3x + 8 \Leftrightarrow (x+4)^3 - 3(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)\,[(x+4)^2 - 3] = 0 \Leftrightarrow x = -4$ și $(x+4)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -4$ sau $x = \pm\sqrt{3} - 4 \notin \mathbb{Z}$. Deci soluția este $x = -4$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** Cum $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$. **(5 p.)**

b) $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x+a)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2ax + 1}{(x^2+1)^2}$, f este descrescătoare $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2ax + 1 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2ax - 1 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 4 \leq 0$ fals. **(5 p.)**

c) Pentru $a = 0$ avem $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ și tabelul de variație a lui f este:

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ 1 $\qquad$ ∞
$f'(x)$	$-------\ -0++++++\ 0------$
$f(x)$	$\searrow \qquad \nearrow \qquad \searrow$

Punctele de extrem sunt 1 și -1. **(5 p.)**

2.*a)* $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+e^x+3)'}{x^2+e^x+3}\,dx = \ln(x^2+e^x+3)\Big|_0^1 = \ln\frac{4+e}{4}$. **(5 p.)**

b) $\int_0^1 xf'(x)\,dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \ln\frac{4+e}{4} = \frac{2+e}{4+e} - \ln\frac{4+e}{4}$. **(5 p.)**

c) Fie F o primitivă a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$. Atunci $\int_0^x t\,f(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt = F(t)\Big|_0^x = F(x)-F(0)$.

Din teorema lui l'Hospital avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} F'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\,dx = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+xe^x}{x^2+e^x+3} = 2$. **(5 p.)**