Testul 15

Subiectul I

1. Rația este $r = 4 - 1 = 3$. Atunci $x = 4 + 3 = 7$, $y = x + 3 = 7 + 3 = 10$ și $x + y = 17$. **(5 p.)**

2. x și y sunt rădăcinile ecuației $t^2 - 6t + 8 = 0$. Rezultă $x = 2, y = 4$ sau $x = 4, y = 2$. **(5 p.)**

3. Fie $a = 2^x$. Avem $a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$ sau $a = -3$. Cum $a > 0$, rezultă $2^x = 2$ deci $x = 1$. **(5 p.)**

4. A are 6 elemente, deci $2^6 = 64$ submulțimi. **(5 p.)**

5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, cu lungimea $\left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = 2$. **(5 p.)**

6. Cum $NP = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$, avem $\sin(\sphericalangle MNP) = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. *a)* Căutăm $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x^2 - y^2 = 3$. De exemplu $x = 2, y = 1$ și matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) $\det A = 1$, $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $A^{-1} = A^*$. Atunci $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M$. **(5 p.)**

c) Fie $X, Y \in M$. Atunci există $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$. Rezultă

$XY = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ ad + bc & ac + bd \end{pmatrix} \in M$. **(5 p.)**

2. *a)* Avem $x*y = (x - 4)(y - 4) - 16 + a$.
„*“ este lege pe $M \Leftrightarrow x*y \neq 4, \forall x, y \neq 4 \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) - 16 + a \neq 4, \forall x, y \neq 4 \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) \neq$ $\neq 20 - a, \forall x, y \neq 4 \Leftrightarrow a = 20$. **(5 p.)**

b) Din punctul a) rezultă că „*“ este lege pe M.

• Asociativitatea: fie $x, y, z \in M$; $(x * y) * z = ((x - 4)(y - 4) + 4) * z = (x - 4)(y - 4)(z - 4) + 4$, iar $x * (y*z) = x * ((y - 4)(z - 4) + 4) = (x - 4)(y - 4)(z - 4) + 4$, deci legea „*“ este asociativă.

• Element neutru: $e \in M \Leftrightarrow (x - 4)(e - 4) + 4 = x, \forall x \in M \Leftrightarrow (x - 4)(e - 4) = x - 4 \Leftrightarrow e - 4 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e = 5 \in M$.

• Simetrizabilitatea elementelor: fie $x \in M$; x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in M$ astfel încât $x*x' = x'*x = e \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 4)(x' - 4) + 4 = 5 \Leftrightarrow (x - 4)(x' - 4) = 1 \Leftrightarrow x' - 4 = \frac{1}{x - 4} \Leftrightarrow x' = 4 + \frac{1}{x - 4} \in M$ pentru că $\frac{1}{x - 4} \neq 0$, deci toate elementele lui M sunt simetrizabile. **(5 p.)**

c) $f(xy) = xy + 4$, iar $f(x) * f(y) = (x + 4) * (y + 4) = xy - 16 + a$. Rezultă $-16 + a = 4 \Leftrightarrow a = 20$ **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow -1} \dfrac{e^x}{x+1} = -\infty$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală. Cum f este continuă pe $\mathbb{R} - \{1\}$, nu există alte asimptote verticale. **(5 p.)**

b) $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$. Din tabloul de variație rezultă că imaginea funcției f este $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$. Rezultă că ecuația $f(x) = \dfrac{4}{5}$ nu are soluții. **(5 p.)**

c) Fie $x = y > 0$. Cum f este crescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{e^x}{x+1} \geq \dfrac{e^y}{y+1} \Leftrightarrow e^{x-y} \geq \dfrac{x+1}{y+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - y \geq \ln\dfrac{x+1}{y+1}$. **(5 p.)**

2. ***a)*** Cum $(x + x\ln x)' = 1 + \ln x + 1 = 2 + \ln x$.

Atunci $\int f(x)\,dx = \int \dfrac{(x+\ln x)'}{x+\ln x}\,dx = \ln(x + \ln x) + C$.

Rezultă $F(x) = \ln(x + \ln x) + c$. Cum $F(1) = c \Rightarrow c = 2$, deci $F(x) = \ln(x + \ln x) + 2$. **(5 p.)**

b) $\int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1) = \ln(e+1)$. **(5 p.)**

c) Fie G o primitivă a lui f. Atunci $G''(x) = f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x(1+\ln x) - (2+\ln x)^2}{x^2(1+\ln x)^2} = \dfrac{1 + \ln x - 4 - 4\ln x - \ln^2 x}{x^2(1+\ln x)^2} =$

$= -\dfrac{\ln^2 x + 4\ln x + 3}{x^2(1+\ln x)^2} = -\dfrac{(\ln x + 1)(\ln x + 3)}{x^2(1+\ln x)^2} = -\dfrac{\ln x + 3}{x^2(1+\ln x)} \leq 0$, $\forall x \in [1, \infty)$, deci G este concavă. **(5 p.)**