Testul 14

Subiectul I

1. Raţia este egală cu 2, deci al şaselea termen este $\frac{1}{4}\cdot 2^5 = 8$. **(5 p.)**

2. Rădăcinile trinomului $x^2 - 3x + 2 = 0$ sunt 1 şi 2. Obţinem $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. **(5 p.)**

3. Cum $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2x$, rezultă $2^x = 3$, deci $x = \log_2 3$. **(5 p.)**

4. $C_{12}^3 = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$, $A_{11}^1 = 11$, obţinem 220 – 11 = 209. **(5 p.)**

5. Din $\frac{1}{m} = \frac{m}{4}$ rezultă $m^2 = 4$, deci $m = 2$ sau $m - -2$. **(5 p.)**

6. Triunghiul e dreptunghic în A, deoarece $6^2 + 8^2 = 10^2$. Rezultă $h = \frac{6\cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. *a)* $\Delta(0,1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$. **(5 p.)**

b) $\Delta(x,1,-1) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 1 + 1 + 3x = x(x^2+3).$. Obţinem $x = 0$. **(5 p.)**

c) Dezvoltând determinantul, obţinem $\Delta(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Desfăcând parantezele din membrul drept obţinem cerinţa. **(5 p.)**

2. *a)* $f(x + T_1 + T_2) = f(x + T_1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $T_1 + T_2 \in G_f$. **(5 p.)**

b) Din punctul a), adunarea numerelor reale este lege pe G_f. Adunarea numerelor reale este asociativă. Cum $f(x + 0) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $0 \in G_f$.

Fie $T \in G_f$. Cum $f((x - T) + T) = f(x - T)$, rezultă că $f(x - T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $-T \in G_f$. **(5 p.)**

c) $T \in G_f \Leftrightarrow f(x + T) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2(x + T)^2 + x + T + 1 = 2x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4xT + 2T^2 + x + T + x + 1 = 2x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2T^2 + 4xT + T = 0 \Leftrightarrow 2T^2 + (4x + 1)T = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow T = 0$. Deci $G_f = \{0\}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci nu există asimptotă orizontală. Cum $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$, iar $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci nu există asimptote oblice. Cum f este continuă pe $[0, \infty)$, rezultă că graficul lui f nu are asimptote verticale. **(5 p.)**

b) $f'(x) = \left(\frac{x^{3/2}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x+1) - x\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x+1)^2} \geq 0$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$, deci f este crescătoare. **(5 p.)**

c) Cum $f(9)=\dfrac{27}{10}=2{,}7<3$, $f(16)=\dfrac{64}{17}>3$ iar f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux, rezultă că există $c \in (9, 16)$ cu $f(x)=3$. **(5 p.)**

2.*a)* $V=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1\dfrac{1}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x=\pi\dfrac{(x+1)^{-3}}{-3}\Bigg|_0^1=\pi\dfrac{1-\dfrac{1}{8}}{3}=\dfrac{7\pi}{24}$. **(5 p.)**

b) $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=x+1$ şi $\int\limits_1^2(x+1)^2\mathrm{d}x=\dfrac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_1^2=\dfrac{27-8}{3}=\dfrac{19}{3}$. **(5 p.)**

c) $\int\limits_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{1}{(x+1)^2}e^x\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)'e^x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{e^x}{x+1}\Bigg|_0^1+\int\limits_0^1\dfrac{1}{x+1}e^x\mathrm{d}x=-\dfrac{e}{2}+1+\int\limits_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$. Rezultă că $\int\limits_0^1(f_2(x)-f_1(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2-e}{2}$. **(5 p.)**