Testul 13

Subiectul I

1. Avem $\sqrt[3]{8}+\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}-20=2+18-20=0$. **(5 p.)**

2. Cum $x_r=\dfrac{-m}{2\cdot 3}$, avem $\dfrac{m}{6}=2$ deci $m=12$. **(5 p.)**

3. Avem $\lg(7+3)+\lg(7-6)=\lg 10+\lg 1=1+0=1$. **(5 p.)**

4. Sunt $A_4^2=12$ submulţimi. **(5 p.)**

5. Din $\sqrt{(a-0)^2+(1+4)^2}=5$ rezultă $a^2+25=25$, deci $a=0$. **(5 p.)**

6. $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\dfrac{4+9-16}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{1}{4}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** De exemplu $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) $\det X=-1, X^*=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, deci $X^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Cum $0+1=1+0=1$, rezultă $X^{-1}\in M$. **(5 p.)**

c) Fie $X,Y\in M$. Există $a,b,c,d,x,y,z,t\in\mathbb{R}$ cu $a+b=c+d=x+y=z+t=1$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Atunci $XY=\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bt\\ cx+dz & cy+dt\end{pmatrix}$ şi cum $ax+bz+ay+bt=a(x+y)+$ $+b(z+t)=1$, $cx+dz+cy+dt=c+d=1$, rezultă $XY\in M$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $A^k\cdot A^p=\begin{pmatrix}3^k & 3^k-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^p & 3^p-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^p\end{pmatrix}=A^k\cdot A^p=\begin{pmatrix}3^{k+p} & 3^{k+p}-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^{k+p}\end{pmatrix}=A(k+p)$,

$\forall k,p\in\mathbb{Z}$. **(5 p.)**

b) Din punctul ***a)***, înmulţirea matricelor este lege pe G. Înmulţirea matricelor este asociativă. Elementul neutru este $I_3=A(0)\in G$ şi pentru orice $k\in\mathbb{Z}$, $A(k)\cdot A(-k)=A(-k)\ A(k)=A(0)$, deci toate matricele din G sunt inversabile. **(5 p.)**

c) Fie $X=A(k)$. Cum $X^4=A(4k)=\begin{pmatrix}3^{4k} & 3^{4k}-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^{4k}\end{pmatrix}$. Atunci X este soluţie a ecuaţiei date $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{4k}=81\Leftrightarrow 3^{4k}=3^4\Leftrightarrow k=1$, deci $X=A(1)=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. *a)* $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ și $f(0) = 0$, deci f este continuă în $x_0 = 0$. Cum f este elementară pe $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$, rezultă că f este funcție continuă. **(5 p.)**

b) Cum $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$ pentru $x > 0$, deci f este crescătoare pe $(0,\infty)$. Deoarece f este continuă în 0, pentru ca f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$ este suficient ca f să fie crescătoare pe $(-\infty, 0)$.
Cum $f'(x) = -2x + a$, $x \in (-\infty, 0)$ rezultă că $f'(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \Leftrightarrow a = 0$. Deci $a \in [0, \infty)$. **(5 p.)**

c) $\lim_{x\to\infty}(f(x) - f(x+1)) = \lim_{x\to\infty}\left(-1 + \ln\frac{x+1}{x+2}\right) = -1$. **(5 p.)**

2. *a)* $f_1(x) = xe^x$ și $f_1(x) \le 0$, $\forall x \in [-1, 0]$. Rezultă că $A = \int_{-1}^{0} |f_1(x)|\, dx = -\int_{-1}^{0} xe^x\, dx = -\int_{-1}^{0} x(e^x)'\, dx =$

$= -\, xe^x \Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x\, dx = -\frac{1}{e} + e^x \Big|_{-1}^{0} = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$. **(5 p.)**

b) $\int_0^1 f_{n+1}(x)\, dx = \int_0^1 x^{n+1}e^x\, dx = \int_0^1 x^{n+1}(e^x)'\, dx = e^x \cdot x^{n+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x\, dx = e - (n+1)\int_0^1 f_n(x)\, dx$, deci

$\int_0^1 f_{n+1}(x)\, dx + (n+1)\int_0^1 f_n(x)\, dx = e$. **(5 p.)**

c) Fie $g(x) = \frac{f_1(x)}{1+e^x} = \frac{xe^x}{1+e^x}$. Atunci $g(-x) = \frac{-xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e^x+1} = -\frac{x}{1+e^x} = -g(x)$. Cum g este impară, rezultă că $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$. **(5 p.)**