Testul 12

Subiectul I

1. Avem $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=9$, deci $\log_2(9-1)=\log_2 8=3$. **(5 p.)**

2. Cum $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=-1$, avem $(2x_1-1)(2x_2-1)=4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=-4-2+1=-5$. **(5 p.)**

3. Avem $3^{-2(x+1)}=3^{6x}$, de unde $-2x-2=6x\Rightarrow 8x=-2\Rightarrow x=-\dfrac{1}{4}$. **(5 p.)**

4. Sunt 90 de numere, dintre care 15, 24, 33, 42, 51 şi 60 verifică cerinţa. Probabilitatea este $\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$. **(5 p.)**

5. Din $a+1+2(a-1)+5=0$ rezultă $3a+4=0$, deci $a=-\dfrac{4}{3}$. **(5 p.)**

6. $a=150°$, deci $\cos a=\dfrac{-1}{2}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* $f(A)=A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) Din $f(B)=O_2$ rezultă $AB=O_2$. Cum $\det A=1$, matricea A este inversabilă, deci $B=A^{-1}O_2=O_2$. **(5 p.)**

c) Avem $f(C)=I_2\Rightarrow AC=I_2\Leftrightarrow C=A^{-1}$. Inversa matricei A este $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2.*a)* $8-3\sqrt{3}\in M$ pentru că $8\in\mathbb{Z}$, $3\in\mathbb{Z}$ şi $8^2-7\cdot3^2=64-63=1$. **(5 p.)**

b) Fie $x=a+b\sqrt{7}\in M$; $y=c+d\sqrt{7}\in M$. Atunci $xy=ac+7bd+(ad+bc)\sqrt{7}=\alpha+\beta\sqrt{7}$. Cum $\alpha\in\mathbb{Z}$, $\beta\in\mathbb{Z}$ şi $\alpha^2-7\beta^2=(ac+7bd)^2-7(ad+bc)^2=a^2c^2+49b^2d^2-7a^2d^2-7b^2c^2=(a^2-7b^2)(c^2-7d^2)=1$, rezultă că $x\cdot y\in M$. **(5 p.)**

c) Din punctul b) rezultă că înmulţirea numerelor reale este lege pe M. Înmulţirea numerelor reale este asociativă, $1=1+0\sqrt{7}\in M$, iar dacă $x=a+b\sqrt{7}\in M$, atunci $x\neq0$ şi $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{7}}=\dfrac{a-b\sqrt{7}}{a^2-7b^2}=$
$=a-b\sqrt{7}=a+(-b)\sqrt{7}\in M$ pentru că $a^2-7(-b)^2=a^2-7b^2=1$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* Avem $f'(x)=3x^2-3$ şi $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)=72$. **(5 p.)**

b) Tabelul de variaţie a lui f este:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		+ + + + + + + + +	0	– – – – – –	0	+ + + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	∞

Din tabelul de variaţie rezultă că $a=1$. **(5 p.)**

c) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(-1)=4$, $f(1)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Cum f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux rezultă că pentru orice $m\in(0,4)$ ecuaţia $f(x)=m$ are trei soluţii: $x_1\in(-\infty,-1)$, $x_2\in(-1,1)$ şi $x_3\in(1,\infty)$. **(5 p.)**

2.*a)* $\int_0^1 f_3(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$. **(5 p.)**

b) Avem $\int_0^1 f_{n+2}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}$. **(5 p.)**

c) Cum $x^{n+2} \le x^n$, $\forall x \in [0, 1]$, rezultă că $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} \le \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Atunci $2\int_0^1 f_{n+2}(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f_{n+2}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \le 2\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, deci $\int_0^1 f_{n+2}(x) \le \frac{1}{2(n+1)} \le \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Din prima inegalitate deducem că $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2(n-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n = 2$, deci $\frac{1}{2(n+1)} \le \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2(n-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n = 2$. **(5 p.)**