Testul 11

Subiectul I

1. Avem $a_9 - a_4 = 5r$, r fiind rația progresiei. Atunci $r = \dfrac{30-5}{5} = 5$ și $a_1 = a_4 - 3r = 5 - 15 = -10$. **(5 p.)**

2. Avem $x^2 + 1 \le 3 + 2x - 3$, deci $x^2 - 2x + 1 \le 0$, de unde $(x-1)^2 \le 0$. Rezultă $x = 1$. **(5 p.)**

3. Ecuația se scrie $\log_2 3x = 3 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = 8/3$, care verifică condiția $x \in (0,\infty)$. **(5 p.)**

4. $C_{n+1}^{n-1} = \dfrac{(n+1)n}{2}$, $C_n^1 = n$, deci obținem $(n+1)n = 10n$. Rezultă $n = 9$. **(5 p.)**

5. Avem $\dfrac{-3}{2} = \dfrac{m+1}{3} \Rightarrow m + 1 = -\dfrac{9}{2}$, deci $m = -\dfrac{11}{2}$. **(5 p.)**

6. Avem $AC = 6$ și $\dfrac{AC}{\sin 30^\circ} = \dfrac{AB}{\sin C}$, de unde $\sin C = \dfrac{5 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \dfrac{5}{12}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. *a)* $\det A = ad - bc$, deci $-1 = ad - 2$ implică $ad = 1$. **(5 p.)**

b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) Suma elementelor se scrie $(a+c)^2 + (b+d)^2$, deci este un număr pozitiv. **(5 p.)**

2. *a)* $\sqrt{(x^2-3)(y^3-3)+3} = \sqrt{x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 9 + 3} = \sqrt{x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 12} = x * y$, $\forall x, y \in (\sqrt{3}, \infty)$. **(5 p.)**

b) Din punctul ***a)*** $\Rightarrow$ „$*$" este lege pe $(\sqrt{3}, \infty)$.

• Asociativitatea: fie $x, y, z \in (\sqrt{3}, \infty)$; atunci $(x*y)*z = \sqrt{(x^2-3)(y^2-3)+3} * z =$
$= \sqrt{(x^2-3)(y^2-3)(z^2-3)+3}$, iar $x*(y*z) = x * \sqrt{(y^2-3)(z^2-3)+3} = \sqrt{(x^2-3)(y^2-3)(z^2-3)+3} =$
$= (x*y)*z$.

• Elementul neutru: $e \in (\sqrt{3}, \infty)$ este element neutru $\Leftrightarrow e*x = x*e = x$, $\forall x \in (\sqrt{3}, \infty) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2-3)(e^3-3)+3} = x \Leftrightarrow (x^2-3)(e^2-3) = x^2 - 3$, $\forall x \in (\sqrt{3}, \infty) \Leftrightarrow e^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow e^2 = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e = \pm 2$, dar $e \in (\sqrt{3}, \infty) \Rightarrow e = 2$.

• Simetrizabilitatea elementelor: fie $x \in (\sqrt{3}, \infty)$; x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in (\sqrt{3}, \infty)$ astfel încât $x*x' = x'*x = e \Leftrightarrow \sqrt{(x^2-3)(x'^2-3)+3} = 2 \Leftrightarrow (x^2-3)(x'^2-3)+3 = 4 \Leftrightarrow x'^2 - 3 = \dfrac{1}{x^2-3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x'^2 = 3 + \dfrac{1}{x^2-3} \Leftrightarrow x' = \sqrt{3 + \dfrac{1}{x^2-3}} \in (\sqrt{3}, \infty)$ pentru că $\dfrac{1}{x^2-3} > 0$. Deci toate elementele sunt simetrizabile. **(5 p.)**

c) $x*x*x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2-3)^3+3} = 2 \Leftrightarrow (x^2-3)^3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4$, $x \in (\sqrt{3}, \infty) \Leftrightarrow x = 2$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln 3-3\frac{\ln x}{x}\right)$. Cum, din teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, rezultă că limita este egală cu ln 3. **(5 p.)**

b) $f'(x)=\ln 3-\frac{3}{x}=\frac{x\ln 3-3}{x}$. Tabloul de variație a lui f este:

x	0 $\qquad$ $\frac{3}{\ln 3}$ $\qquad$ ∞
$f'(x)$	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\;0\;+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$
$f(x)$	↘ min ↗

Din tabel rezultă că unicul punct de extrem al lui f este $\frac{3}{\ln 3}$. **(5 p.)**

c) Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x-x+1$. Cum $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$, tabelul de variație a lui g este:

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ ∞
$g'(x)$	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\;0\;-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$
$g(x)$	↗ max ↘

Rezultă că $g(x)\le g(1)=0$, deci $\ln x\le x-1$. Rezultă că $f(x)=x\ln 3-3\ln x=x\ln 3-3x+3=3-x(3-\ln 3)\ge$ $\ge 3-2x$, $\forall x\in(0,\infty)$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{(x+1)^2-x^2}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\Big|_1^2+\frac{1}{x+1}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. **(5 p.)**

b) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F\in\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\mathbf{C}$, deci $F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+c$, $c\in\mathbb{R}$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=c\in\mathbb{R}$, rezultă că dreapta $y=c$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. **(5 p.)**

c) $V=\pi\int_2^3\sqrt{\frac{f(x)}{2x+1}}\,\mathrm{d}x=\pi\int_2^3\frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x=\pi\int_2^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\pi(\ln x-\ln(x+1))\Big|_2^3=\pi\ln\frac{x}{x+1}\Big|_2^3=\pi\ln\frac{9}{8}$. **(5 p.)**