Testul 10

Subiectul I

1. Din $(2x)^2 = -16 + 16x$ rezultă $x^2 - 4x + 4 = 0$, deci $x = 2$. **(5 p.)**

2. $f(x) = 1 - 2x$. Atunci $1 - 2x - 1 \leq -3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. **(5 p.)**

3. $\log_{16}4 = \log_4 2 = \frac{1}{2}$. Suma este egală cu 1. **(5 p.)**

4. $T_4 = C_7^3 \cdot 1^4 (2x)^3 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8x^3 = 280x^3$. **(5 p.)**

5. Ecuația este $y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x$. **(5 p.)**

6. $BC^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos 60° = 325 - 150 = 175$, deci $BC = 5\sqrt{7}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. ***a)*** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$. **(5 p.)**

b) Fie $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Avem $a + b + c = 1, -3a - 3b - 3c = -3, 2a + 2b + 2c = 2$; o soluție este $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, adică $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

c) $A - xI_3 = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -3 & -3-x & -3 \\ 2 & 2 & 2-x \end{pmatrix}$. Avem $\det(A - xI_3) = (1 - x)(-3 - x)(2 - x) - 6 - 6 - 2(-3 - x) + 6(1 - x) + 3(2 - x) = (-x^3 + 7x - 6) - 12 + 6 + 2x + 6 - 6x + 6 - 3x = -x^3$, deci $x = 0$. **(5 p.)**

2. ***a)*** $M(2) \cdot M(3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 243 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) Avem $M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^y & 0 \\ 0 & 3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 \\ 0 & 3^{x+y} \end{pmatrix} = M(x + y) \in G$ pentru că $x + y \in \mathbb{Z}$. Înmulțirea matricelor este asociativă, $I_2 = M(0) \in G$ și cum $M(x) \cdot M(-x) = M(0) = I_2$, rezultă că $(M(x))^{-1} = M(-x)$, deci toate matricele din G sunt inversabile. **(5 p.)**

c) Avem $(f + y) = M(x + y) = M(x) \cdot M(y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, deci f este morfism.

Dacă $f(x) = f(y) \Rightarrow M(x) = M(y) \Rightarrow 2^x = 2^y \Rightarrow x = y$, deci f este injectivă.

Fie $M \in G$. Atunci $\exists\, x \in \mathbb{Z}$ cu $M = M(x)$. Cum $f(x) = M(x) = M \Rightarrow f$ este surjectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă. **(5 p.)**

Subiectul III

1. ***a)*** Pentru $x > 0$, $f'(x) = e^x + \frac{1}{x+1}$, deci $f'(1) = e + \frac{1}{2}$. Cum $f(1) = e + \ln 2$, rezultă că ecuația tangentei este $y - e - \ln 2 = \left(e + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$. **(5 p.)**

b) Cum $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}(2x+a)=a\Rightarrow f_s'(0)=a$. Cum $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{e^x+\ln(1+x)-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\searrow 0}\left(e^x+\dfrac{1}{1+x}\right)=2\ \Rightarrow\ f_d'(0)=2\Leftrightarrow f'{}_s(0)$, f este derivabilă în 0 $\Leftrightarrow a=2$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{3^x+e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\ln(1+x)}{3^x+e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e}{3}\right)^x\cdot\dfrac{1+\dfrac{\ln(1+x)}{e^x}}{1+\left(\dfrac{e}{3}\right)^x}=0$. **(5 p.)**

2.*a)* $\int\limits_1^e f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^e\left(\ln x-2\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^e\ln x\,\mathrm{d}x-2\int\limits_1^e\mathrm{d}x+4\int\limits_1^e\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e\mathrm{d}x-2\int\limits_1^e\mathrm{d}x+$

$+4\ln(x+1)\Big|_1^e=e-3(e-1)+4\ln\dfrac{e+1}{2}=3-2e+4\ln\dfrac{e+1}{2}$. **(5 p.)**

b) Cum $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2\dfrac{2}{(x+1)^2}=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2>0$, $\forall x\in[1,\infty)$ rezultă că f este crescătoare, deci $f(x)=f(1)=0$, $\forall x\in[1,\infty]$. Cum $F'(x)=f(x)\ge 0$, $\forall x\in[1,+\infty)\Rightarrow F$ este crescătoare. Deoarece $x\le x^2$, $\forall x\in[1,\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow F(x)\le F(x^2)$, $\forall x\in[1,\infty)$. **(5 p.)**

c) Avem $\int\limits_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^x\ln t\,\mathrm{d}t-2\int\limits_1^x\mathrm{d}t+4\int\limits_1^x\dfrac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t=t\ln t\Big|_1^t-3\int\limits_1^x\mathrm{d}t+4\ln(t+1)\Big|_1^x=x\ln x-3(x-1)+4\ln\dfrac{x+1}{2}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int\limits_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{3(x-1)}{x^2}+4\,\dfrac{\ln\dfrac{x+1}{2}}{x^2}\right)=0$, aplicând teorema lui l'Hospital, cazul

$\dfrac{\infty}{\infty}$. **(5 p.)**