Testul 1

Subiectul I

1. Deoarece $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = -1$, obținem $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$. **(5 p.)**
2. Rezolvăm ecuația $f(a) = a + 1$. Avem $2a - 1 = a + 1$, deci $a = 2$. **(5 p.)**
3. $\log_4 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. **(5 p.)** **4.** $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, $C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, deci $C_{10}^2 - C_9^2 = 9$. **(5 p.)**

5. Triunghiul este dreptunghic în B. Avem $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, unde D este al patrulea vârf al dreptunghiului $ABCD$. Atunci $|\overrightarrow{BD}| = BD = AC = 5$. **(5 p.)**

6. Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ rezultă $\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, deci $\sin x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ dar $0° < x < 90°$. Obținem $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1.*a)* Avem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 1$ și $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. **(5 p.)**

b) $\det A = 1 - 2a$, deci $\det A^2 = (1 - 2a)^2$. Din $(1 - 2a)^2 = 1$ rezultă $a = 0$ și $a = 1$. **(5 p.)**

c) Avem $AB = \begin{pmatrix} 3+4a & 2+3a \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 7 & 3a+2 \\ 10 & 4a+3 \end{pmatrix}$, deci $3 + 4a = 7$, de unde $a = 1$. **(5 p.)**

2.*a)* $1 * 2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+8+a} = 3 \Leftrightarrow 9 + a = 27 \Leftrightarrow a = 18$. **(5 p.)**

b) • Asociativitatea: fie $x, y, z \in \mathbb{R}$; atunci $(x * y) * z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1} * z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1 + z^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2}$ și $x * (y * z) = x * \sqrt[3]{y^3 + z^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2} = x * (y * z)$.

• Elementul neutru. $e \in \mathbb{R}$ este element neutru $\Leftrightarrow x*e = e*x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + e^3 - 1} = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^3 + e^3 - 1 = x^3$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^3 = 1 \Leftrightarrow e = 1 \in \mathbb{R}$.

• Simetrizabilitatea elementelor: fie $x \in \mathbb{R}$; x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*x' = x'*x = e \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + x^3 - 1} = 1 \Leftrightarrow x^3 + x'^3 x = 2 \Leftrightarrow x' = \sqrt[3]{2 - x^3}$, deci orice element din $\mathbb{R}$ este simetrizabil. **(5 p.)**

c) $f(x) * f(y) = \sqrt[3]{x - a} * \sqrt[3]{y - a} = \sqrt[3]{x - a + y - a + a} = \sqrt[3]{x + y - a} = f(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. **(5 p.)**

Subiectul III

1.*a)* Avem $f'(x) = \frac{(2x+5)(x+1) - x^2 - 5x - 8}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$. Cum $f(0) = 8$ și $f'(0) = -3$, rezultă că ecuația tangentei este $y - 8 = -3x$. **(5 p.)**

b) $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = +\infty$, deci $x = -1$ este asimptotă verticală. Cum f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f nu are alte asimptote verticale. **(5 p.)**

c) $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+1-4}{(x+1)^2}=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$, deci $f''(x)=\dfrac{8}{(x+1)^3}<0$ pentru $x<-1$. Deci f este concavă pe $(-\infty,-1)$. **(5 p.)**

2.*a)* Cum $f(-x)=5^x-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-x}=\dfrac{1}{5^x}-5^x=-f(x)$, avem $\int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-5}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{5}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t+$ $+\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{5}(f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{5}0\,\mathrm{d}x=0$. **(5 p.)**

b) Avem $\int_{-x}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Cum $25^x=1$ pentru $x=0$ rezultă că $5^x\geq\dfrac{1}{5^x}$, deci $f(x)=0$ pentru $x=0$. Rezultă că $\int_{x}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t\geq 0$. **(5 p.)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5^x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5^x}\left(\dfrac{5^t}{\ln 5}\Bigg|_0^x-\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^t}{\ln\frac{1}{5}}\Bigg|_0^x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{5^x}\left(\dfrac{5^x-1}{\ln 5}+\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^x-1}{\ln 5}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(5^x-1\right)^2}{\left(5^{2x}\ln 5\right)}=\dfrac{1}{\ln 5}$. **(5 p.)**