Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1-2i$ și $z_2 = 2+i$. Arătați că $(z_1+i)(z_2-1)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x)>0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+2\log_2\sqrt{x-2}=\log_2 x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ și $M(2,4)$. Determinați coordonatele punctului N, știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin(A+B)+\cos C=1$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 3 & a\\ 2 & 1 & -1\\ a & 3 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+3y+az=2\\ 2x+y-z=-1\\ ax+3y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=a^3B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a)=A(a)-A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0\le 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1+z_2}{4\cdot|z_1z_2|+1}$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*2=\dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $|z*z|=|z|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.