

Testul 9

Subiectul I

1. Determinați numerele reale x și y știind că $(x - 3)^2 + (2x + y)^2 = 0$. (5 p.)
2. Arătați că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - x + 1$ nu intersectează prima bisectoare a sistemului de coordonate. (5 p.)
3. Rezolvați ecuația $\log_3(3x - 1) = 2 \log_3 2$. (5 p.)
4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$. (5 p.)
5. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(1, 2)$ față de $B(2, -1)$. (5 p.)
6. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 4. Calculați $\sin A$ știind că $BC = 5$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculați $\det(2A + I_2)$. (5 p.)
 - b) Arătați că $A^4 - 3A^2 = O_2$. (5 p.)
 - c) Determinați A^{-1} . (5 p.)
2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$ și $M = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, unde $\sigma^n = \underbrace{\sigma\sigma\sigma \dots \sigma}_{n \text{ ori}}$.
 - a) Calculați σ^{2012} . (5 p.)
 - b) Arătați că M este grup în raport cu operația de înmulțire a permutărilor. (5 p.)
 - c) Fie x o permutare din S_5 astfel încât $x\sigma \in M$. Arătați că $x \in M$. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.
 - a) Arătați că f este convexă pe $[0, \infty)$. (5 p.)
 - b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$. (5 p.)
 - c) Arătați că $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$. (5 p.)
2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$.
 - a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul lui f , axa Ox și dreptele $x = 1, x = 2$. (5 p.)
 - b) Calculați $\int_1^2 (x^2 + 2x)f(x) dx$. (5 p.)
 - c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.