

Testul 8

Subiectul I

1. Arătați că $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$. (5 p.)
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x$. Aflați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate. (5 p.)
3. Rezolvați ecuația $\log_2|x| = 2$. (5 p.)
4. Câte numere naturale cu 3 cifre distincte, având cifrele din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$, au 2 cifre pare și una impară? (5 p.)
5. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(-1, 1), B(1, m)$ și $C(4, 0)$ să fie coliniare. (5 p.)
6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC cu $AB = 5, AC = 12$ și $BC = 13$. (5 p.)

Subiectul II

1. Considerăm sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x - y + z = a + 2 \\ 3x - 2y + 2z = a + 1, \text{ unde } a \in \mathbb{Z}. \\ x - y + 2z = a \end{cases}$$
 - a) Calculați determinantul matricei sistemului. (5 p.)
 - b) Rezolvați sistemul. (5 p.)
 - c) Determinați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului verifică $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$. (5 p.)
2. Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.
 - a) Stabiliți dacă I_2 aparține mulțimii G . (5 p.)
 - b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^*$. (5 p.)
 - c) Arătați că (G, \cdot) este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor pătratice de ordinul 2. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.
 - a) Arătați că f este continuă în punctul $x_0 = 1$. (5 p.)
 - b) Stabiliți dacă f este derivabilă în punctul $x_0 = 1$. (5 p.)
 - c) Arătați că f este descrescătoare. (5 p.)
2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{t+1} dt$.
 - a) Calculați $f(1)$. (5 p.)
 - b) Arătați că $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$. (5 p.)
 - c) Arătați că $\frac{1}{2(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$, oricare ar fi $x \in (1, \infty)$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.