

Testul 7

Subiectul I

1. Aflați suma primilor 10 termeni ai progresiei 1, 4, 7, (5 p.)
2. Arătați că $x^2 - 3xy + 3y^2 \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. (5 p.)
3. Rezolvați ecuația $2^x + 2^{x+1} = 24$. (5 p.)
4. Determinați numărul funcțiilor inversabile $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$. (5 p.)
5. Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC știind că $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$ și $C(3, 0)$. (5 p.)
6. Calculați $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculați $\det(2A) - 2\det A$. (5 p.)
 - b) Calculați inversa matricei A . (5 p.)
 - c) Calculați $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$. (5 p.)
2. Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se definește legea de compoziție
$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 + x^2 + y^2}.$$
 - a) Demonstrați că $(x*y) * z = x*(y*z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$. (5 p.)
 - b) Arătați că $x * 0 = 0 * x = x$, $\forall x \in [0, \infty)$. (5 p.)
 - c) Arătați că dacă $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, atunci nu există $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * y = 0$. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \in (-1, 0] \\ x^3 + e^x - 1, & x \in (0, \infty) \end{cases}$
 - a) Arătați că f este funcție continuă în punctul $x_0 = 0$. (5 p.)
 - b) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f . (5 p.)
 - c) Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2}$. (5 p.)
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$.
 - a) Calculați $\int_0^1 \left(f(x) + \frac{x}{x^2+x+1} \right) dx$. (5 p.)
 - b) Dacă F este o primitivă a lui f , calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\ln x}$. (5 p.)
 - c) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx \geq \ln 2$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.