

Testul 6

Subiectul I

1) Determinați partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{50}-7}$. (5 p.)

2. Rezolvați ecuația $\frac{1}{x+1} = 2x+1$. (5 p.)

3. Calculați $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_7 8$. (5 p.)

4. Care este probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui $A = \{1, 2, 3, 4\}$, aceasta să aibă suma elementelor egală cu 5? (5 p.)

5. Calculați lungimea vectorului $\vec{u} + \vec{v}$, unde $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. (5 p.)

6. Calculați aria triunghiului cu laturi 5, 7 și 9. (5 p.)

Subiectul II

1. Considerăm sistemul
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ ax+y-z=3 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

a) Calculați determinantul matricei sistemului. (5 p.)

b) Arătați că sistemul nu are soluții pentru $a = 1$. (5 p.)

c) Rezolvați sistemul pentru $a = 3$. (5 p.)

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, unde $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ ori}}$.

a) Arătați că M are exact 4 elemente. (5 p.)

b) Dacă „ \cdot ” este operația de înmulțire a matricelor pătratiche de ordinul 3 cu elemente reale, alcătuiți tabla operației „ \cdot ” pe M . (5 p.)

c) Arătați că M este grup în raport cu legea „ \cdot ”. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + ae^x}{x-1}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ a graficului funcției f . (5 p.)

b) Determinați valoarea reală a lui a pentru care $f'(0) = -1$. (5 p.)

c) Dacă $a = 0$, arătați că f este convexă pe intervalul $(1, \infty)$. (5 p.)

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$. (5 p.)

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ în jurul axei Ox . (5 p.)

c) Arătați că $\int_0^1 x^{2012} f(x) dx \geq \frac{2\sqrt{2}}{4029}$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.