

Testul 5

Subiectul I

1. Determinați numerele reale pentru care expresia $\sqrt{1-x^2}$ este bine definită. (5 p.)
2. Determinați axa de simetrie a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 5$. (5 p.)
3. Rezolvați ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4$. (5 p.)
4. Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (5 p.)
5. Fie punctele A, B, C, D în plan astfel încât $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Calculați $\overline{DA} + \overline{DC} + 2\overline{BD}$. (5 p.)
6. Calculați perimetrul triunghiului ABC în care $AB = 4, AC = 5$ și $A = 30^\circ$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculați $\det A$. (5 p.)
 - b) Verificați dacă $A^3 - 3A^2 + 2A = O_3$. (5 p.)
 - c) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\det(A - xI_3) = 0$. (5 p.)
2. Pe mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} se definește legea de compoziție
$$x * y = \frac{1}{5}xy + 3x + 3y + 30.$$
 - a) Aflați numărul rațional a pentru care $x * a = a, \forall x \in \mathbb{Q}$. (5 p.)
 - b) Dați exemplul de două numere raționale x și y , care nu sunt numere întregi și pentru care $x * y$ este număr întreg. (5 p.)
 - c) Arătați că funcția $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = 5x - 15$ are proprietatea $f(xy) = f(x) * f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$.
 - a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ a graficului funcției f . (5 p.)
 - b) Determinați cel mai mic număr real a cu proprietatea că f este descrescătoare pe intervalul $[a, \infty)$. (5 p.)
 - c) Rezolvați ecuația $f''(x) = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. (5 p.)
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.
 - a) Calculați $\int_1^e f(x) dx$. (5 p.)
 - b) Determinați primitiva F a lui f cu $F(0) = 1$. (5 p.)
 - c) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul lui f , axa Ox și dreptele $x = 0, x = e$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.