

# Testul 40

## Subiectul I

1. Numerele reale  $x$  și  $y$  verifică  $2^x = 5$  și  $5^y = 2$ . Calculați  $xy$ . (5 p.)
2. Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 1$  intersectează axele de coordonate în punctele  $A$  și  $B$ . Calculați lungimea segmentului  $AB$ . (5 p.)
3. Rezolvați ecuația  $\frac{1}{2^x} = 4^{-1}$ . (5 p.)
4. Aflați câte numere naturale de două cifre au ambele cifre nenule și pare. (5 p.)
5. Fie punctele  $A(1, 2)$  și  $B(-1, 5)$  și  $O$  originea sistemului de coordonate. Aflați coordonatele punctului  $M$  știind că  $\overline{OA} + 2\overline{OB} = \overline{OM}$ . (5 p.)
6. Un triunghi  $ABC$  are laturile  $AB = 3 + \sqrt{3}$ ,  $AC = 3 - \sqrt{3}$  și  $BC = 2\sqrt{6}$ . Arătați că  $A = 90^\circ$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Considerăm matricea  $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculați determinantul matricei  $M(2)$ . (5 p.)
  - b) Calculați pătratul matricei  $M(1)$ . (5 p.)
  - c) Arătați că există o infinitate de matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $A^2 = I_3$ . (5 p.)
2. Fie polinomul  $f = X^4 - 3X^2 + X + 1$  și  $x_1, x_2, x_3, x_4$  rădăcinile lui.
  - a) Calculați  $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2)$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $f(x_1 + x_2 + x_3) + f(x_1 + x_2 + x_4) + f(x_1 + x_3 + x_4) + f(x_2 + x_3 + x_4) = 0$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 0 \\ (x^2 + x + 1) \ln x, & x > 0 \end{cases}$ .
  - a) Calculați limitele laterale ale lui  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ . (5 p.)
  - b) Arătați că funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $[1, \infty)$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^4 + x - 1}{x^2 + 1}$ .
  - a) Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\int_0^1 \frac{f''(x) f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.