

# Testul 4

## Subiectul I

1. Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  inecuația  $x^2 \leq 4x$ . (5 p.)
2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 8$  cu axa  $Ox$ . (5 p.)
3. Rezolvați ecuația  $\log_2 x = \log_5 25$ . (5 p.)
4. Calculați  $\frac{C_{10}^2 + C_{10}^8}{A_{10}^2}$ . (5 p.)
5. Determinați punctul de abscisă 2 ce aparține dreptei de ecuație  $2x - 3y + 5 = 0$ . (5 p.)
6. Triunghiul  $ABC$  are  $AB = AC = 4$  și  $B = 75^\circ$ . Aflați aria triunghiului. (5 p.)

## Subiectul II

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculați  $A^2 - 2A + I_2$ . (5 p.)
  - b) Determinați  $B \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $B^2 = A$ . (5 p.)
  - c) Fie  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\det(A - xI_2) = 0$ . Calculați  $\det(A^2 - xI_2)$ . (5 p.)
2. Fie  $M = (2, \infty)$  și legea de compoziție „\*“ definită pe  $\mathbb{R}$  prin  $x*y = xy + ax - 2y + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - a) Determinați valorile lui  $a$  și  $b$  pentru care  $1*3 = 3*1 = 1$ . (5 p.)
  - b) Arătați că dacă  $M$  este grup în raport cu legea „\*“, atunci  $a = -2$  și  $b = 6$ . (5 p.)
  - c) Pentru  $a = -2$  și  $b = 6$  rezolvați ecuația  $(x*x)*x = 3, x \in \mathbb{R}$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}$ .
  - a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$ . (5 p.)
  - b) Studiați derivabilitatea funcției  $f$  în punctul  $x_0 = 0$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $f'(x) > 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^5 + x + 1)e^x$ .
  - a) Calculați  $\int_0^1 (f(x) - x^5 e^x) dx$ . (5 p.)
  - b) Arătați că aria suprafeței mărginită de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = 0, x = 1$  este strict mai mare ca  $\frac{5}{2}$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5} \int_0^x f(t) dt$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.