

# Testul 38

## Subiectul I

1. Calculați  $a + b$  știind că numerele  $a, 5, b, 1$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. (5 p.)
2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul  $\begin{cases} a + b = 1 \\ 9ab = 2 \end{cases}$ . (5 p.)
3. Funcția  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  este inversabilă.  
Calculați  $f^{-1}(1) + f^{-1}(2) + f^{-1}(3)$ . (5 p.)
4. Calculați  $\frac{A_6^6}{A_6^5}$ . (5 p.)
5. Vectorul  $\vec{v} = 5\vec{i} + m\vec{j}$  are lungimea egală cu 13. Calculați  $m$ . (5 p.)
6. Calculați perimetrul triunghiului  $ABC$  în care  $AB = AC = 4$  și  $A = 150^\circ$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Fie matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculați  $A^2 - B$ . (5 p.)
  - b) Verificați dacă  $AB = BA$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $\det(I_2 - xA) > 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ . (5 p.)
2. Fie  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a + \hat{2}b & b \\ b & a - \hat{2}b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ , unde  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$  este corpul claselor de resturi modulo 5.
  - a) Determinați numărul elementelor mulțimii  $G$ . (5 p.)
  - b) Arătați că  $AB \in G$ , oricare ar fi  $A, B \in G$ . (5 p.)
  - c) Arătați că dacă  $A \in G$ , atunci  $\det(A) \neq \hat{2}$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{x + e^x}$ .
  - a) Determinați ecuația asimptotei orizontale a graficului funcției  $f$ . (5 p.)
  - b) Arătați că funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $(x + e^x)f(x) \geq x^2 + x + 1$ , oricare ar fi  $x \in [0, \infty)$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 - x$ .
  - a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției  $f$  și axa  $Ox$ . (5 p.)
  - b) Arătați că  $\int_0^2 x f^n(x) dx$ , oricare ar fi numărul natural nenul  $n$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\int_0^2 (f^n(x) - f^{n+1}(x)) dx$ , unde  $n$  este un număr natural nenul. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.