

# Testul 37

## Subiectul I

1. Verificați dacă  $(2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2$  este un număr natural. (5 p.)
2. Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - ax + 1$  să verifice  $f(-1) = f(4)$ . (5 p.)
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x+1} + 4^x = 8$ . (5 p.)
4. Calculați numărul permutărilor mulțimii  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . (5 p.)
5. Arătați că punctele  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 3)$  și  $C(4, 5)$  sunt coliniare. (5 p.)
6. În triunghiul  $ABC$  avem  $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$  și  $AC = \sqrt{10}$ .  
Calculați  $BC$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{Z}$  notăm  $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculați determinantul matricei  $A(3)$ . (5 p.)
  - b) Arătați că  $A(n) \cdot A(m) = A(n+m)$ , oricare ar fi  $n, m \in \mathbb{Z}$ . (5 p.)
  - c) Calculați inverse matricei  $A(3)$ . (5 p.)
2. Fie polinomul  $f = X^4 + aX^3 + aX + 1$ , unde  $a$  este un număr real și  $x_1, x_2, x_3, x_4$  rădăcinile lui.
  - a) Determinați valorile lui  $a$  pentru care  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $\frac{x_1^2 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 - 1}{x_2} + \frac{x_3^2 - 1}{x_3} + \frac{x_4^2 - 1}{x_4}$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $(1 - 2x_1)(1 - 2x_2)(1 - 2x_3)(1 - 2x_4)$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2e^x, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{2x+3}{x+1}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$ .
  - a) Arătați că funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0]$ . (5 p.)
  - b) Demonstrați că  $f(x) < f(y)$ , oricare ar fi  $x \in (-\infty, 0)$  și  $y \in (0, \infty)$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f'(x)$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^1 t^x e^t dt$ .
  - a) Calculați  $f(1)$ . (5 p.)
  - b) Arătați că  $f(x) \leq \frac{e}{x+1}$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $f(x+1) + (x+1)f(x) = e$ , oricare ar fi  $x \in (0, \infty)$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.