

Testul 36

Subiectul I

1. Determinați numerele naturale $n, n > 1$, pentru care $\log_n 27 \in \mathbb{N}$. (5 p.)
2. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că maximul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = -x^2 + 2x + a$ este egal cu 2. (5 p.)
3. Rezolvați ecuația $3^{x+1} = 9^x$. (5 p.)
4. Scrieți toate submulțimile cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$. (5 p.)
5. Fie vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = \vec{i} - 2\vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $3\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. (5 p.)
6. Fie $x, 0^\circ < x < 90^\circ$, astfel încât $\cos x = \frac{3}{4}$. Calculați $\cos(180^\circ - x)$. (5 p.)

Subiectul II

1. Considerăm mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
 - a) Calculați $\det A$, unde $A \in M$. (5 p.)
 - b) Arătați că $(A - I_3)^3 = O_3$, oricare ar fi $A \in M$. (5 p.)
 - c) Demonstrați că $AB \in M$, oricare ar fi $A, B \in M$. (5 p.)
2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{2}$ cu coeficienți în corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$.
 - a) Determinați $a \in \mathbb{Z}_3$ știind că f are rădăcina $\hat{2}$. (5 p.)
 - b) Determinați $a \in \mathbb{Z}_3$ știind că f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$. (5 p.)
 - c) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_3$, polinomul f are cel mult o rădăcină în \mathbb{Z}_3 . (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x + \ln x + 1$.
 - a) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f . (5 p.)
 - b) Arătați că $f(x) \leq x^3$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. (5 p.)
 - c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f'(x)}{f(x)}$. (5 p.)
2. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$.
 - a) Determinați primitivele funcției f . (5 p.)
 - b) Calculați $\int_1^2 x f(x) dx$. (5 p.)
 - c) Arătați că $\int_1^2 f^n(x) dx + \frac{n}{\ln 2} \int_1^2 f^{n-1}(x) dx = 2$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.