

# Testul 34

## Subiectul I

1. Aflați  $x \in \mathbb{N}$  știind că  $1 + 3 + 5 + \dots + x = 100$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2|x| - 1$ .  
Determinați punctele de intersecție ale graficului funcției  $f$  cu axa  $Ox$ . (5 p.)
3. Determinați inverse funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{2}$ . (5 p.)
4. Calculați  $\frac{C_{10}^5}{C_9^4}$ . (5 p.)
5. Fie vectorul  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ . Aflați  $a \in \mathbb{R}$  știind că lungimea vectorului  $a\vec{v}$  este egală cu 10. (5 p.)
6. Calculați  $\sin(55^\circ - 25^\circ) + \sin(155^\circ - 20^\circ)$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Fie matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x \in \mathbb{Z}$ .
  - a) Calculați  $\det A(x)$ . (5 p.)
  - b) Arătați că  $A(x)$  este o matrice inversabilă, oricare ar fi  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $x \neq 1$ . (5 p.)
  - c) Calculați inverse matricei  $A(0)$ . (5 p.)
2. Fie polinomul  $f = X^3 + 2X^2 + aX + b$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
  - a) Determinați valorile reale ale lui  $a$  și  $b$  pentru care  $f$  se divide cu  $X^2 + X + 1$ . (5 p.)
  - b) Pentru  $a = 2$  și  $b = 1$ , descompuneți  $f$  în factori ireductibili în  $\mathbb{R}[X]$ . (5 p.)
  - c) Determinați valorile reale ale lui  $a$  pentru care  $x_1(1 - x_1) + x_2(1 - x_2) + x_3(1 - x_3) = 2$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x^3, & x \leq 0 \\ (x^2 + x)e^x, & x > 0 \end{cases}$ .
  - a) Arătați că  $f$  are derivate laterale în punctul  $x_0 = 0$ . (5 p.)
  - b) Demonstrați că  $f$  este crescătoare pe intervalul  $(-\infty, 0)$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f''(x)}$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$ .
  - a) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției  $f$  în jurul axei  $Ox$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $\int_1^2 x f(x) \ln x \, dx$ . (5 p.)
  - c) Arătați că orice primitivă a lui  $f$  este funcție convexă. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.