

# Testul 33

## Subiectul I

1. Determinați partea întreagă a numărului  $\sqrt[3]{100}$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)(x-2) - x^2$ .  
Rezolvați inecuația  $f(x) \leq 0$ . (5 p.)
3. Rezolvați ecuația  $\log_2 x = \log_4 5$ . (5 p.)
4. Determinați numărul submulțimilor nevide ale mulțimii  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . (5 p.)
5. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații  $x - 2y + 5 = 0$  și  $3x + y - 1 = 0$ . (5 p.)
6. Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$  și are aria 20. Știind că  $AB = 4$ , calculați  $\cos B$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Considerăm matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - a) Calculați  $\det(A - I_3)$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $A^2$ . (5 p.)
  - c) Verificați dacă  $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$ . (5 p.)
2. Fie polinomul  $f = X^4 + aX^3 - 10X^2 + aX + 24$ , unde  $a$  este un număr real.
  - a) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(1) = f(-1)$ . (5 p.)
  - b) Pentru  $a = 0$  determinați rădăcinile lui  $f$ . (5 p.)
  - c) Arătați că pentru orice  $a \in \mathbb{R}^*$  restul împărțirii lui  $f$  la polinomul  $X^2 - 1$  este un polinom de grad 1. (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 \ln x$ .
  - a) Arătați că  $xf'(x) - 3f(x) = x^3$ , oricare ar fi  $x > 0$ . (5 p.)
  - b) Determinați punctele de extrem ale funcției  $f$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{x^2}$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_{-1}^x t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt$ .
  - a) Calculați  $f(1)$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^5}$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $f$  este crescătoare pe  $[0, \infty)$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.