

Testul 32

Subiectul I

1. Calculați $\frac{\log_5 4}{\log_5 2}$. (5 p.)
2. Determinați ecuația axei de simetrie a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$. (5 p.)
3. Rezolvați ecuația $9^x - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$. (5 p.)
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ și măririndu-l cu 10%, acesta să fie mai mare sau egal cu $n + 1$. (5 p.)
5. Determinați ordonata punctului P aparținând dreptei $d: x - 3y + 5 = 0$ știind că abscisa sa este egală cu 4. (5 p.)
6. Calculați cosinusul celui mai mic unghi al triunghiului ABC știind că $AB = 13$, $BC = 12$, $CA = 5$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculați determinantul matricei A . (5 p.)
 - b) Calculați inversa matricei A . (5 p.)
 - c) Demonstrați că matricea $I_2 + xA$ este inversabilă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (5 p.)
2. Fie polinomul $f = X^4 + 3X^2 + X + a$ cu coeficienții în corpul \mathbb{Z}_7 .
 - a) Determinați $a \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât polinomul f să se dividă cu $X + \hat{6}$. (5 p.)
 - b) Pentru $a = \hat{2}$ determinați câtul împărțirii lui f la polinomul $X^2 + \hat{1}$. (5 p.)
 - c) Pentru $a = \hat{2}$ determinați rădăcinile lui f din \mathbb{Z}_7 . (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x + x}{x^2 + 1}$.
 - a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$. (5 p.)
 - b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 0$. (5 p.)
 - c) Arătați că f este crescătoare pe intervalul $(-1, 1)$. (5 p.)
2. Fie mulțimea $A = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă și } f(1) = f'(1) = 0\}$.
 - a) Arătați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_1^x (\ln(1+t^2) - \ln 2) dt$ aparține lui A . (5 p.)
 - b) Dacă $f \in A$, arătați că exact o primitivă a lui f aparține lui A . (5 p.)
 - c) Calculați $\int_0^1 x f''(x) dt$, știind că $f \in A$ și $f(0) = 1$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.