Testul 30

Subiectul I

1. Calculați $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației $x^2+x-1=0$. **(5 p.)**

2. Aflați minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$. **(5 p.)**

3. Rezolvați ecuația $\frac{\log_3 x}{\log_3 2}=4$. **(5 p.)**

4. Determinați câte numere naturale de 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 3\}$. **(5 p.)**

5. Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că vectorii $\overrightarrow{v_1}=\vec{i}+\overrightarrow{2j}$ și $\overrightarrow{v_2}=(m+1)\vec{i}+(4m+3)\vec{j}$ au aceeași direcție. **(5 p.)**

6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC cu $AB=3, AC=7$ și $\cos A=\frac{11}{14}$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. În sistemul cartezian xOy considerăm punctele $A(1, 1)$ și $B(n, n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Determinați ecuația dreptei B_1B_2. **(5 p.)**

b) Arătați că punctele B_n, B_m, B_p sunt coliniare, oricare ar fi numerele distincte $n, m, p\in\mathbb{N}$. **(5 p.)**

c) Determinați $n\in\mathbb{N}$ știind că aria triunghiului AB_1B_n este egală cu 2. **(5 p.)**

2. Fie polinomul $f=X^5-3X+1$ și x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 rădăcinile sale.

a) Determinați restul împărțirii lui f la polinomul X^2-1. **(5 p.)**

b) Calculați $x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6$. **(5 p.)**

c) Calculați $(4-x_1^2)(4-x_2^2)(4-x_3^2)(4-x_4^2)(4-x_5^2)$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x+7}{x^2+3x+2}$.

a) Determinați numerele reale A și B pentru care $f(x)=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}$. **(5 p.)**

b) Arătați că f este descrescătoare pe orice interval $I\subset\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$. **(5 p.)**

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f'(x)$. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^1 \frac{t^x+1}{t+1}\,dt$.

a) Calculați $f(2)$. **(5 p.)**

b) Arătați că $f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln 4$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$. **(5 p.)**

c) Demonstrați că $f(x)\geq\frac{1}{2(x+1)}+\ln 2$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.