

Testul 3

Subiectul I

1. Numerele 3, x , y , 8 sunt în progresie aritmetică. Calculați $x + y$. (5 p.)

2. Determinați punctul de intersecție al graficelor funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3x + 2, g(x) = 10 - f(x). \quad (5 \text{ p.})$$

3. Rezolvați ecuația $\log_2 x + \log_2(x + 1) = 1$. (5 p.)

4. Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, știind că $21 = C_n^2$. (5 p.)

5. Punctele A, B, C verifică $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Calculați $\frac{BC}{AC}$. (5 p.)

6. Calculați $\sin^2 40^\circ + \cos^2 140^\circ$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det(A + xI_2) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. (5 p.)

b) Aflați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $AB = BA$. (5 p.)

c) Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (5 p.)

2. Fie mulțimea $M = (0, \infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție „ $*$ ” definită pe $(0, \infty)$ prin $x * y = x^{\log_2 y}$.

a) Arătați că, dacă $x > 0, y > 0$ și $x * y = 1$ atunci $x = 1$ sau $y = 1$. (5 p.)

b) Demonstrați că M este grup în raport cu legea „ $*$ ”. (5 p.)

c) Arătați că funcția $f: M \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = 2^x$ este izomorfism de la grupul

$(M, *)$ la grupul (\mathbb{R}^*, \cdot) . (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3 \ln x - 1$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. (5 p.)

b) Arătați că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$. (5 p.)

c) Studiați derivabilitatea funcției $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ în punctul $x_0 = 1$. (5 p.)

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$.

a) Arătați că $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. (5 p.)

b) Determinați mulțimea primitivelor lui f pe intervalul $(1, \infty)$. (5 p.)

c) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției $g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x f(x)$ și dreptele $x = 2, x = 3$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.