

Testul 29

Subiectul I

1. Verificați dacă $\log_7 4 + \log_7 3 - \log_7 12 = 0$. (5 p.)
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Rezolvați inecuația $f(x) + f(1) \leq f(2)$. (5 p.)
3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\frac{1}{2^x} = \frac{3^x}{36}$. (5 p.)
4. Determinați câte submulțimi ordonate cu două elemente are mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (5 p.)
5. Punctele $A(1, 2)$ și $B(2, m)$ determină o dreaptă paralelă cu dreapta de ecuație $x - 2y + 5 = 0$. Determinați m . (5 p.)
6. Calculați $\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ + \cos^2 165^\circ$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie determinantul $D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.
 - a) Calculați $D(2, 0)$. (5 p.)
 - b) Determinați $a \in \mathbb{Z}$ știind că $D(a, 2) = -2$. (5 p.)
 - c) Demonstrați că numărul $D(a, b)$ este par, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$. (5 p.)
2. Fie polinomul $f = X^3 + 4X^2 + 5X - 7$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.
 - a) Determinați câtul împărțirii lui f la polinomul $X + 3$. (5 p.)
 - b) Calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$. (5 p.)
 - c) Calculați $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie a un număr real nenul și funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0, a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x(x-a)}$.
 - a) Determinați asimptotele verticale ale graficului funcției f . (5 p.)
 - b) Determinați numărul real nenul a știind că $x_0 = 1$ este punct de extrem al funcției f . (5 p.)
 - c) Dacă $a \in (0, \infty)$ arătați că există $b \in (0, \infty)$ astfel încât f este strict descrescătoare pe intervalul (b, ∞) . (5 p.)
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$.
 - a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 1$, $x = 2$. (5 p.)
 - b) Calculați $\int_{-1}^1 x^5 f(x) dx$. (5 p.)
 - c) Arătați că $(2n+3) \int_0^1 f^{n+1}(x) dx = (2n+2) \int_0^1 f^n(x) dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.