Testul 28

Subiectul I

1. Arătați că pentru orice număr întreg $n \in \mathbb{Z}$ avem $n^2 - 5n + 6 \geq 0$. **(5 p.)**

2. Determinați coordonatele punctului aparținând graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ știind că abscisa sa este egală cu ordonata sa. **(5 p.)**

3. Rezolvați ecuația $\log_3(x^2 + 5) = 2$. **(5 p.)**

4. Calculați $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4$. **(5 p.)**

5. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $d_1 : x = y$ și $d_2 : x + 2y - 6 = 0$. **(5 p.)**

6. Fie ABC un triunghi cu $AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}}$. Calculați $\sin B$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A + B)$. **(5 p.)**

b) Determinați A^{-1}. **(5 p.)**

c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $AX = B$. **(5 p.)**

2. Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + 5X^2 + bX + 1$ unde a și b sunt numere reale și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale.

a) Determinați valorile reale ale lui a și b pentru care $f(x) = f(-x)$, oricare ar fi numărul real x. **(5 p.)**

b) Pentru $a = 3$ determinați valorile reale ale lui b pentru care f se divide cu polinomul $X - 1$. **(5 p.)**

c) Pentru $a = 0$ și $b = 1$ calculați $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{9^x - 1}{3^x}$.

a) Arătați că funcția f nu are puncte de extrem. **(5 p.)**

b) Determinați numerele reale a și b astfel încât $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = ax + b$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. **(5 p.)**

c) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0 \\ x^2 + e^x + 2, & x > 0 \end{cases}$.

a) Calculați $\int f(x)\,dx$, $x \in (0, \infty)$. **(5 p.)**

b) Fie F primitiva lui f cu $F(-2) = 0$. Calculați $F(1)$. **(5 p.)**

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, în jurul axei Ox. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.