

Testul 27

Subiectul I

1. Calculați $a - b$, unde $a = \log_4 512$ și $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. (5 p.)
2. Rezolvați inecuația $f(x) \geq f(x+1)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. (5 p.)
3. Rezolvați ecuația $\sqrt{2x+3} = 3$. (5 p.)
4. Calculați $C_9^3 - C_8^3 - C_8^2$. (5 p.)
5. Calculați perimetrul triunghiului ABC , unde $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ și $C(1, 5)$. (5 p.)
6. Calculați sinusul celui mai mic unghi al triunghiului ABC cu $AB = 5$, $BC = 4$, $CA = 3$. (5 p.)

Subiectul II

1. Pentru fiecare număr real x considerăm determinantul $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix}$.
 - a) Calculați $\Delta(0)$. (5 p.)
 - b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\Delta(x) = 0$. (5 p.)
 - c) Arătați că $\Delta(a) = \Delta(b)$ dacă și numai dacă $|a| = |b|$. (5 p.)
2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + aX + a - 4$ unde a este un număr real și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.
 - a) Determinați valorile reale ale lui a pentru care polinomul f se divide cu polinomul $X - 1$. (5 p.)
 - b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 11$. (5 p.)
 - c) Pentru $a = 1$ descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x} - 2x$.
 - a) Arătați că graficul funcției f nu are asimptote spre $+\infty$. (5 p.)
 - b) Demonstrați că f este funcție monotonă. (5 p.)
 - c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$. (5 p.)
2. Fie funcția $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 + \ln x}{\ln x}$.
 - a) Calculați $\int_1^e x \ln x \, dx$. (5 p.)
 - b) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x} \, dx$. (5 p.)
 - c) Fie $F: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f și funcția $G: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - x$. Arătați că G este crescătoare pe $(1, \infty)$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.