

# Testul 26

## Subiectul I

1. Calculați  $\sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 1$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + x$ . Calculați  $f(2^0) + f(2^1) + \dots + f(2^{10})$ . (5 p.)
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{1+x} = x - 1$ . (5 p.)
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $n$  din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , acesta să verifice  $\log_2 n \in \mathbb{Z}$ . (5 p.)
5. Fie  $A, B, C$  trei puncte în plan. Calculați  $\overline{AB} + \overline{CA} - \overline{CB}$ . (5 p.)
6. Calculați  $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$ . (5 p.)

## Subiectul II

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , cu  $a \in \mathbb{Z}$ .
  - a) Calculați  $\det A$ . (5 p.)
  - b) Arătați că matricea  $A$  este inversabilă, oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$ . (5 p.)
  - c) Calculați inversa matricei  $A$  pentru  $a = 0$ . (5 p.)
2. Fie polinomul  $f = X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 2X - 3$ .
  - a) Determinați câtul împărțirii lui  $f$  la  $X^2 - 1$ . (5 p.)
  - b) Descompuneți  $f$  în factori ireductibili în  $\mathbb{R}[X]$ . (5 p.)
  - c) Calculați  $\frac{x_4}{x_1 x_2 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2 x_4} + \frac{x_2}{x_1 x_3 x_4} + \frac{x_1}{x_2 x_3 x_4}$ , unde  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sunt rădăcinile lui  $f$ . (5 p.)

## Subiectul III

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^5, & x \leq 0 \\ \frac{x}{\ln x}, & x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \end{cases}$ .
  - a) Arătați că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0 = 0$ . (5 p.)
  - b) Arătați că funcția  $f$  are derivate laterale în punctul  $x_0 = 0$ . (5 p.)
  - c) Determinați punctele de extrem ale funcției  $f$ . (5 p.)
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ .
  - a) Calculați  $\int_0^1 x f(x) dx$ . (5 p.)
  - b) Calculați  $\int_0^1 f'(x) f''(x) dx$ . (5 p.)
  - c) Arătați că  $\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{7}{24}$ . (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.