Testul 25

Subiectul I

1. Determinați numărul elementelor mulțimii $A \cup B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și B este mulțimea divizorilor naturali ai numărului 12. **(5 p.)**

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(2x-3)(2x+3) > 4x-9$. **(5 p.)**

3. Arătați că $\log_6 2 + \log_6 18 \in \mathbb{N}$. **(5 p.)**

4. Calculați probabilitatea ca, adăugând un număr n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice $n! > 20$. **(5 p.)**

5. Determinați distanța de la punctul $A(1, 2)$ la punctul de intersecție a dreptelor de ecuații $x = 4$ și $y = -2$. **(5 p.)**

6. Calculați $\sin^2 170° + \cos^2 10°$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Considerăm determinantul $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $\Delta(1,1)$. **(5 p.)**

b) Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ știind că $x + y = 2$ și $\Delta(x, y) = 0$. **(5 p.)**

c) Arătați că $\Delta(x, y) \neq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$. **(5 p.)**

2. Fie polinomul $f = X^4 + 3X^3 - 3X + 1$ și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale.

a) Determinați numerele reale a pentru care $f(a) = f(-a)$. **(5 p.)**

b) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. **(5 p.)**

c) Determinați rădăcinile lui f. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x + 3^x + 5^x - 10$.

a) Calculați $f'(0)$. **(5 p.)**

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$

să fie continuă în $x_0 = 1$. **(5 p.)**

c) Arătați că $2^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} + 5^{\sqrt{3}} \leq 38$. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 4x$.

a) Determinați numerele reale a cu proprietatea că $\int_0^a f(x)\,dx = 3$. **(5 p.)**

b) Dacă F este o primitivă a lui f, arătați că $F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) \geq F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. **(5 p.)**

c) Calculați $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \int_0^x f(t)\,dt$. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.