Testul 23

Subiectul I

1. Calculați $23+21+19+\ldots+11+9$. **(5 p.)**

2. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+4$ verifică $f(-2)=1$. Calculați $f(a)$. **(5 p.)**

3. Rezolvați ecuația $5^{1-x}=25^x$. **(5 p.)**

4. Determinați numărul permutărilor mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$. **(5 p.)**

5. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că punctul $A(-1,1)$ aparține dreptei de ecuație $2x+ay-1=0$. **(5 p.)**

6. Calculați $\sin 30°\cdot\cos 60°+\sin 60°\cdot\cos 30°$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{Z}$, notăm cu P_n punctul de coordonate $P_n(n-1,2n+1)$ din sistemul cartezian xOy.

a) Scrieți ecuația dreptei P_1P_2. **(5 p.)**

b) Demonstrați că punctele P_1, P_2 și P_n sunt coliniare, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$. **(5 p.)**

c) Determinați $n\in\mathbb{Z}$ știind că aria triunghiului OP_1P_n este egală cu 3. **(5 p.)**

2. Fie polinomul reciproc $f=X^4-7X^3+aX^2-7X+1$ unde a este un număr real și x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile sale.

a) Determinați valoarea lui a pentru care resturile împărțirii lui f la $X+1$ și $X-2$ sunt egale. **(5 p.)**

b) Calculați $\dfrac{1}{x_1x_2x_3}+\dfrac{1}{x_1x_2x_4}+\dfrac{1}{x_1x_3x_4}+\dfrac{1}{x_2x_3x_4}$. **(5 p.)**

c) Pentru $a=14$ determinați rădăcinile polinomului f. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x^2+ax+1$, unde a este un număr real.

a) Arătați că f este convexă pe intervalul $\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)$. **(5 p.)**

b) Determinați valorile lui a pentru care dreapta $y=3x+1$ este tangenta la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisa 0. **(5 p.)**

c) Determinați mulțimea valorilor lui a pentru care f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+1)\ln x$.

a) Determinați primitivele funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{f(x)}{x^3+x}$. **(5 p.)**

b) Calculați $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$. **(5 p.)**

c) Calculați $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)\,dt$. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.