Testul 20

Subiectul I

1. Scrieți un număr natural care este termen al progresiei geometrice $\frac{81}{16}, \frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \ldots$ **(5 p.)**

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2-x-1$.
Arătați că graficul funcției nu intersectează axa Ox. **(5 p.)**

3. Rezolvați ecuația $\log_2(x+1)-\log_2 x=2$. **(5 p.)**

4. Calculați $\dfrac{C_5^4+C_6^5}{C_{22}^{21}}$. **(5 p.)**

5. Punctele $A(1, 2)$ și $B(2, m)$ determină o dreaptă de pantă 3. Determinați m. **(5 p.)**

6. Arătați că $(\sin 20°-\sin 140°)(\sin 40°-\sin 140°)=0$. **(5 p.)**

Subiectul II

1. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Determinați o matrice $A\in M$ cu $\det A=0$ și neavând toate elementele egale. **(5 p.)**

b) Arătați că $AB=BA$, oricare ar fi $A, B\in M$. **(5 p.)**

c) Determinați $x\in M$ știind că $x^2=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5\end{pmatrix}$. **(5 p.)**

2. Fie mulțimea $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} \hat{1}+\hat{2}x & \hat{4}x \\ \hat{5}x & 1+\hat{4}x\end{pmatrix} \;\middle|\; x\in\mathbb{Z}_6\right\}$, unde $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ este inelul claselor de resturi modulo 6.

a) Arătați că $A(x)\,A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{Z}_6$. **(5 p.)**

b) Arătați că M este grup în raport cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul 2. **(5 p.)**

c) Demonstrați că $X^6=I_2$, oricare ar fi $X\in M$. **(5 p.)**

Subiectul III

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+x+a, & x\le 1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$.

a) Determinați valorile lui a pentru care funcția f este continuă în $x_0=1$. **(5 p.)**

b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0=1$. **(5 p.)**

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. **(5 p.)**

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^5}{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1\left(f(x)+f'(x)\right)dx$. **(5 p.)**

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției
$g:[0, 1]\to\mathbb{R}, g(x)=(x^2+1)f(x)$. **(5 p.)**

c) Calculați $\int_0^1 x^2 f''(x)\,dx$. **(5 p.)**

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.