

Testul 19

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de rație 4. Știind că $a_3 + a_5 = 10$ aflați a_1 . (5 p.)
2. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grad 1 știind că $f(0) = 4$ și $f(2) = 0$. (5 p.)
3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $2^x = 3 - 2^{x+1}$. (5 p.)
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de 2 cifre, acesta să aibă ambele cifre impare. (5 p.)
5. Fie vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Calculați modulul vectorului $4\vec{u} - 5\vec{v}$. (5 p.)
6. Calculați perimetrul triunghiului MNP în care $MN = 3$, $MP = 5$ și $M = 120^\circ$. (5 p.)

Subiectul II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
 - a) Arătați că $AX = O_2$, oricare ar fi $X \in M$. (5 p.)
 - b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $A + mI_2 \in M$. (5 p.)
 - c) Arătați că $XA \in M$, oricare ar fi $X \in M$. (5 p.)
2. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$, unde $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ este corpul claselor de resturi modulo 5.
 - a) Arătați că, dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$. (5 p.)
 - b) Fie $A \in M$ cu $\det(A) = \hat{0}$. Arătați că $A = O_2$. (5 p.)
 - c) Rezolvați ecuația $X^2 = I_2$, $X \in M$. (5 p.)

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+1}{3x-2} + e^x$.
 - a) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (5 p.)
 - b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 0$. (5 p.)
 - c) Să se arate că f este convexă pe intervalul $\left(\frac{2}{3}, \infty \right)$. (5 p.)
2. Fie funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 + 4x + 6)e^x$.
 - a) Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că F este primitivă a lui f . (5 p.)
 - b) Calculați $\int_0^1 (x+3)^2 e^x dx$. (5 p.)
 - c) Calculați $a = \hat{2}$. (5 p.)

Fiecare subiect are alocate 30 de puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.